Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen.

Von

W. Krull in Freiburg i. Br.

In der vorliegenden Arbeit soll eine für die formale Theorie der Differentialausdrücke, sowie für die Theorie der Matrizengruppen wichtige Verallgemeinerung des Begriffs der Abelschen Gruppe behandelt werden, zu der wir auf naturgemäße Weise folgendermaßen gelangen:

Es sei G eine Abelsche Gruppe, dann ist die zwischen ihren Elementen bestehende Verknüpfungsart nicht nur assoziativ, sondern auch kommutativ, und kann daher entgegen dem üblichen Gebrauch als „Addition" anstatt als „Multiplikation" bezeichnet werden. Ist nun α ein beliebiges Element aus G, so enthält G infolge der Gruppeneigenschaft neben α seine „natürlichen Vielfachen" $2\cdot\alpha = \alpha + \alpha$, $3\cdot\alpha = \alpha + \alpha + \alpha$, usw. Die ganzen Zahlen spielen also bei den Abelschen Gruppen die Rolle von Operatoren, mit deren Hilfe wir aus einem beliebigen gegebenen Element neue Gruppenelemente herleiten können, und zwar sind diese Operatoren distributiv, d. h. es ist für jede natürliche Zahl n stets $n\cdot(\alpha+\beta) = n\cdot\alpha + n\cdot\beta$.

Die verallgemeinerten Abelschen Gruppen (in Zukunft kurz v. A. G.), mit denen wir uns im folgenden beschäftigen wollen, entstehen nun aus den gewöhnlichen einfach dadurch, daß wir neben den infolge der Gruppeneigenschaft auftretenden ganzen Zahlen noch weitere distributive Operatoren Θ aus einem im übrigen völlig willkürlichen Operatorenbereich O zulassen, und ein Elementesystem nur dann als Gruppe bezeichnen, wenn es nicht nur hinsichtlich der Addition Gruppeneigenschaft besitzt, sondern auch gleichzeitig mit einem Element α stets jedes Element $\Theta\cdot\alpha$ für beliebiges Θ aus O enthält. — Bei dieser neuen Gruppendefinition kann man die Begriffe der Untergruppe, Vereinigungsgruppe, des Durchschnitts zweier Gruppen usw., genau so einführen wie bei den gewöhnlichen Abelschen Gruppen. Es handelt sich nun vor allem um die Verallgemeinerung des Begriffs der *endlichen* Abelschen Gruppen, die wir so gewinnen: Man kann eine endliche Abelsche Gruppe nicht nur als Abelsche Gruppe mit endlich viel Elementen, sondern auch folgendermaßen charakterisieren: *Eine Abelsche Gruppe heißt endlich, wenn man aus ihr keine ins Unendliche laufende Gruppenkette G_1, G_2, ... entnehmen kann, bei der allgemein G_i eine echte Unter- bzw. Obergruppe von G_{i-1} ist* (d. h. aus G_{i-1} durch Weglassen bzw. Zufügen mindestens eines Elementes entsteht). *In genau der gleichen Weise definieren wir jetzt die verallgemeinerten endlichen Abelschen Gruppen (in Zukunft v. e. A. G.), nur daß an Stelle des Wortes „Abelsche Gruppe" „v. A. G." zu setzen ist.*

Wir gelangen so zu einer Klasse von Bereichen, der neben den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen vor allem die „vollständig reduziblen v. A. G." und die „v. A. G. von endlichem Rang" angehören. Die vollständig reduzibeln v. A. G. sind von der Theorie der Differentialausdrücke und der Matrizenkomplexe her (unter anderm Namen) in der Literatur wohl bekannt[1]), auch sind die grundlegenden Sätze über ihren Aufbau bewiesen. Wir gehen daher in der vorliegenden Arbeit nur kurz auf sie ein, einerseits um die bisher bekannten Resultate noch etwas zu verallgemeinern, andererseits um zu zeigen, daß sie sich wirklich der von uns gegebenen Definition der v. e. A. G. unterordnen.

Die v. A. G. von endlichem Rang, die die allgemeinsten in der Theorie der gewöhnlichen Differentialausdrücke vorkommenden v. A. G. sind, sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre Elemente sich als Linearformen in endlich viel Elementen α_1, α_2, ..., α_n mit Koeffizienten aus einem gegebenen Körper $\mathfrak{K}$ darstellen lassen. In formaler Hinsicht weisen die v. A. G. von endlichem Rang vielfach besonders weitgehende Ähnlichkeiten mit den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen auf, doch ergeben sich beim tieferen Eindringen in ihren Aufbau im wesentlichen dieselben Schwierigkeiten wie bei den allgemeinsten v. e. A. G.

Bei einer näheren Untersuchung der v. e. A. G. lassen wir uns von der Analogie mit den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen leiten. Die grundlegenden Sätze lauten dort in der gewöhnlichen Terminologie: *„Die Gruppen von Primzahlpotenzordnung sind die einzigen unzerlegbaren, d. h. nicht als direktes Produkt echter Untergruppen darstellbaren Gruppen,"* und: *„Jede endliche Abelsche Gruppe läßt sich bis auf Isomorphie eindeutig als direktes Produkt unzerlegbarer Gruppen darstellen."* Das erste dieser beiden Theoreme läßt sich auf die v. e. A. G. nicht übertragen, wir kommen im allgemeinen Fall zu keiner einfachen Charakterisierung der unzerlegbaren v. e. A. G. Hingegen ist es möglich, das zweite Theorem

[1]) Vgl. z. B. A. Loewy, Über vollständig reduzible Differentialgleichungen. Math. Ann. 62 (1906), S. 89–117, sowie die in Anmerkung [30]) bei § 7 angeführte Literatur.

auf die v. e. A. G. auszudehnen, wir können also, wenn wir unserer Bezeichnungsweise gemäß von „direkter Summe“ statt von „direktem Produkt“ reden, den Satz beweisen: *Jede v. e. A. G. läßt sich bis auf Isomorphie eindeutig als direkte Summe unzerlegbarer Gruppen darstellen.* Auch ist es möglich, für die absolute Eindeutigkeit dieser Darstellung notwendige und hinreichende Kennzeichen zu gewinnen. Die Beweise sind wesentlich umständlicher als bei den gewöhnlichen Abelschen Gruppen, was einfach aus der oben hervorgehobenen Tatsache folgt, daß wir bei den v. e. A. G. infolge der Willkürlichkeit des Operatorenbereichs über die besondere Natur der unzerlegbaren Gruppen sehr wenig Bescheid wissen.

Zum Ausgleich dieses Mißstandes müssen die Schlußweisen, die man beim Beweis der Remakschen Sätze[2]) über die direkte Produktzerlegung nichtkommutativer Gruppen anwendet, in weitgehendem Maße herangezogen werden, doch gelingt auch damit allein der Beweis nicht, weil wir den bei den nichtkommutativen Gruppen wesentlichen Begriff des Zentrums nicht auf unsern Fall übertragen können. Wir müssen zum Ersatz dafür als neues Hilfsmittel den neuen Begriff der Zurückleitungsgruppe einführen, durch dessen Vermittlung wir dann endlich den gewünschten Einblick in den Aufbau einer beliebigen v. e. A. G. aus ihren unzerlegbaren Komponenten gewinnen.

Die bisher geschilderten Entwicklungen bilden den Inhalt der ersten sechs Paragraphen der vorliegenden Arbeit: In § 1 werden die v. A. G., in § 2 die v. e. A. G. eingeführt, während § 3 den vollständig reduziblen v. A. G., § 4 den v. A. G. von endlichem Rang gewidmet ist. In § 5 wird die Theorie der Zurückleitungsgruppen entwickelt, und in § 6 wird schließlich der Fundamentalsatz samt seinen Folgerungen bewiesen.

Die beiden letzten Paragraphen bringen Anwendungen der gewonnenen Ergebnisse auf die Theorie der Differentialausdrücke, sowie der Matrizenkomplexe.

Mit jedem linearen Differentialgleichungssystem n-ter Ordnung mit einer unabhängigen Veränderlichen und mit Koeffizienten aus einem gegebenen Funktionenkörper ist eine v. A. G. vom endlichen Range n verknüpft, und es gelten die Sätze: Zwei Differentialgleichungssysteme sind dann und nur dann von derselben Art, wenn ihre zugeordneten Gruppen isomorph sind. Ein Differentialgleichungssystem ist dann und nur dann zerlegbar, d. h. als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches total teilerfremder Differentialgleichungssysteme darstellbar, wenn die zugeordnete Gruppe zerlegbar ist. Auf Grund dieser beiden Sätze gelangen wir durch Anwendung des Fundamentalsatzes der v. e. A. G. zu dem Theorem:

[2]) Vgl. z. B.: R. Remak, Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, Journ. für Math. 137 (1911), S. 293–308.

Sieht man Differentialgleichungssysteme der gleichen Art als nicht verschieden an, so ist die Darstellung eines Differentialgleichungssystems als kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachens total teilerfremder unzerlegbarer Systeme eindeutig bestimmt.

Hiermit ist für Differentialgleichungssysteme ein neuer Zerlegungssatz bewiesen, der neben die Loewyschen Sätze[3]) über den Aufbau eines Differentialgleichungssystems aus seinen irreduziblen bzw. vorderen oder hinteren größten vollständig reduziblen Bestandteilen zu stellen ist. Dabei kann das Verhältnis des hier neu gewonnenen Ergebnisses zu den Loewyschen Resultaten am besten durch folgende Analogie klargemacht werden: *Der im Texte bewiesene Fundamentalsatz entspricht dem Remakschen Satz über die direkte Produktzerlegung gewöhnlicher endlicher Gruppen, während die Loewyschen Sätze in der Theorie der gewöhnlichen endlichen Gruppen den Jordan-Hölderschen Satz, sowie weitere Ergebnisse über den Aufbau einer Gruppe mit Hilfe gewisser ausgezeichneter Kompositionsreihen liefern würden.* — Daß übrigens auch die Loewyschen Sätze mit Hilfe der Theorie der v. A. G. in zum Teil recht einfacher Weise bewiesen werden können, gedenkt der Verfasser gelegentlich an anderer Stelle darzulegen.

Statt auf ein System mit n abhängigen Veränderlichen kann man die Theorie der v. A. G. in ganz entsprechender Weise auf eine einzige Differentialgleichung n-ter Ordnung anwenden, man kann auch Systeme linearer partieller Differentialgleichungen[4]) in Betracht ziehen, nur muß man sich dann ausdrücklich auf solche Systeme beschränken, denen sich v. e. A. G. zuordnen lassen, da bei partiellen Differentialgleichungen eine solche Zuordnung im allgemeinen nicht immer möglich sein wird.

Die Anwendung unserer Ergebnisse auf die Theorie der Matrizenkomplexe ergibt sich folgendermaßen: Jeder Matrix läßt sich eine v. e. A. G. von endlichem Rang zuordnen, und einem Matrizenkomplex entspricht auf diese Weise ein Gruppenkomplex. *Es zeigt sich nun, daß auf Gruppenkomplexe die Begriffsbildungen und folglich auch die Ergebnisse der ersten sechs Paragraphen unmittelbar übertragen werden können.* Man kann daher in Anbetracht des Zusammenhangs zwischen Matrizenkomplexen und Gruppenkomplexen sofort den folgenden Satz aussprechen:

Sieht man ineinander transformierbare Matrizenkomplexe als nicht verschieden an, so kann man jeden Matrizenkomplex (insbesondere jede

---

[3]) Vgl. A. Loewy, Über Matrizen- und Differentialkomplexe I, II, III. Math. Ann. 78 (1917), S. 1–54 bzw. 343–368.

[4]) Über die Möglichkeit dieser Ausdehnung vgl. insbesondere die in Anmerkung [30]) bei § 6 nochmals ausführlich besprochene Noether-Schmeidlersche Arbeit: „Moduln in nichtkommutativen Bereichen.“

(gewöhnliche) Gruppe von Matrizen) in eine eindeutig bestimmte Kette unzerlegbarer Komplexe transformieren.

Über die Einordnung dieses Ergebnisses unter die bisher bekannten Sätze ist im wesentlichen dasselbe zu sagen, was oben bei den Differentialgleichungssystemen bemerkt wurde.

§ 1.

Definition der verallgemeinerten Abelschen Gruppen.

In diesem Paragraphen soll genau auseinandergesetzt werden, was wir im folgenden unter „verallgemeinerten Abelschen Gruppen" (v. A. G.) verstehen, und es sollen einige in der gewöhnlichen Gruppentheorie übliche Definitionen und Sätze auf diese Bereiche übertragen werden.

Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ein System von Elementen, die durch eine gewisse assoziative und kommutative Operation (in Zukunft „Addition" genannt und entsprechend bezeichnet)[5]) miteinander verknüpft werden können. Außerdem möge ein gewisser Operatorenbereich O mit den Elementen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ vorgelegt sein, derart, daß durch Anwendung jedes Operatorelementes Θ aus einem beliebigen Element α ein eindeutig bestimmtes Element $\Theta \cdot \alpha = \alpha'$ abgeleitet werden kann[6]). *Die einzige wesentliche Voraussetzung, die wir über die Natur von O machen, ist die, daß die Operatoren Θ sämtlich distributiv sind, daß also für beliebiges Θ und für beliebige Elemente α_1 und α_2 stets die Gleichung $\Theta \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) = \Theta \cdot \alpha_1 + \Theta \cdot \alpha_2$ gilt.*

Wir nennen jetzt das System G eine v. A. G., wenn es folgenden beiden Bedingungen genügt:

I. *G besitzt hinsichtlich der Addition die Gruppeneigenschaft, d. h. es ist gleichzeitig mit α_1 und α_2 stets auch $\alpha_1 + \alpha_2$ in G enthalten; es existiert das Einheitselement* 0, *das für beliebiges α der Gleichung $\alpha + 0 = \alpha$*

---

[5]) Gewöhnlich ist in der Gruppentheorie die Multiplikation als Verknüpfungsregel üblich, obwohl bei den kommutativen Gruppen gegen Verwendung der Bezeichnung „Addition" nichts einzuwenden sein dürfte. Hier mußte mit Rücksicht auf das Folgende unbedingt von „Addition" gesprochen werden. Der Verfasser dachte auch daran, statt von einer „Gruppe" von einem „Modul" zu reden, was vor allem mit Rücksicht auf die Anwendungen von § 7 nahelag. Doch hätte eine derartige Bezeichnungsweise an verschiedenen Stellen mit der sonst in der Literatur üblichen Terminologie zu Unstimmigkeiten geführt. Es dürfte daher die oben gewählte Ausdrucksweise vor allem angesichts des später öfter zu betonenden, sehr engen Zusammenhangs mit der gewöhnlichen Gruppentheorie wohl am vorteilhaftesten sein.

[6]) Auch in der Theorie der gewöhnlichen Abelschen Gruppen (g. A. G.) kommen distributive Operatoren vor, nämlich die bereits in der Einleitung erwähnten ganzen natürlichen Zahlen.

genügt, und es gibt zu jedem Element α *das durch die Gleichung* $\alpha + (-\alpha) = 0$ *gekennzeichnete „inverse" Element* $-\alpha$.

II. *G ist hinsichtlich O abgeschlossen, d. h. es gehört für beliebiges Θ aus O und beliebiges α aus G stets das Element $\Theta \cdot \alpha$ dem System G an.*

Ein Teilbereich G_1 von G, der ebenfalls den Axiomen I und II genügt, heißt Untergruppe von G, und zwar echte Untergruppe, wenn er von G verschieden ist. In jeder Untergruppe von G ist die aus dem einzigen Element 0 bestehende Untergruppe enthalten.

Sind endlich viele Gruppen[7] $G_1, G_2, \ldots, G_n$ *vorgelegt, so verstehen wir unter ihrer Summe* $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ *die Gesamtheit aller Elemente von der Form* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, *wobei* α_i *ein beliebiges Element aus* G_i *bedeutet, unter ihrem Durchschnitt* $[G_1, G_2, \ldots, G_n]$ *die Gesamtheit aller sowohl in* G_1, *als in* $G_2, \ldots,$ *als in* G_n *enthaltenen Elemente.* Summe und Durchschnitt sind selbst Gruppen, sie genügen also insbesondere, wie aus der Distributivität der Operatoren folgt, dem Axiom II.

Zwei Gruppen, deren Durchschnitt aus dem einzigen Elemente 0 *besteht, heißen elementefremd. In diesem Falle bezeichnen wir die Summe von* G_1 *und* G_2 *als „direkte Summe" und schreiben* $G = ((G_1, G_2))$. — *In entsprechender Weise reden wir von der direkten Summe* $((G_1, G_2, \ldots, G_n))$ *der n Gruppen,* $G_1, G_2, \ldots, G_n$, *wenn jede der Gruppen* G_i *zur Summe der* $n-1$ *übrigen elementefremd ist. Eine Gruppe heißt zerlegbar, wenn sie sich als direkte Summe von echten Untergruppen darstellen läßt, im andern Falle nennen wir sie unzerlegbar*[8]).

Ist $G = ((G_1, \ldots, G_n))$ und bedeutet $\overline{G}$ eine beliebige Untergruppe von G, so gilt für jedes Element α aus $\overline{G}$ eine Darstellung $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, wobei α_i ein, wie aus der Definition der Elementefremdheit unmittelbar folgt, eindeutig bestimmtes Element aus G_i darstellt. α_i soll als die G_i-Komponente von α (hinsichtlich der Darstellung $G = ((G_1, \ldots, G_n))$) bezeichnet werden. Ist $\alpha^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(1)}$, $\alpha^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(2)}$, so haben wir

$$\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}); \ \Theta \cdot \alpha^{(1)} = \Theta \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \Theta \cdot \alpha_i^{(1)}.$$

Aus diesen beiden Formeln folgt unmittelbar:

Die Gesamtheit derjenigen Elemente aus G_i, *die die* G_i-*Komponente eines Elementes aus* $\overline{G}$ *darstellen, bilden eine Untergruppe* $G_i^{(\overline{G})}$ *von* G_i.

[7]) Unter „Gruppe" verstehen wir im folgenden immer eine v. A. G. Eine Gruppe im üblichen Sinn bezeichnen wir zur Unterscheidung stets als „gewöhnliche Gruppe".

[8]) Setzt man „Produkt" an Stelle von „Summe", „Einheit" an Stelle von „Null", so erhält man bekannte Definitionen aus der Theorie der g. A. G.

Diese Untergruppe soll als die G_i-Komponente von $\bar{G}$ (hinsichtlich der Darstellung $((G_1, G_2, \ldots, G_n))$) bezeichnet werden.

Es gilt nun folgender auch in der Theorie der g. A. G., sowie bei den nichtkommutativen endlichen Gruppen wichtiger Satz [9]):

Satz 1. *Ist $G = ((G_1, G_2))$ und dedeutet $\bar{G}$ eine beliebige, zu G_2 elementefremde Untergruppe von G, so ist $\bar{G}$ zu seiner G_1-Komponente isomorph.*

Dabei ist der Isomorphismus für unsere v. A. G. sinngemäß so zu definieren: Zwei Gruppen G und G' heißen isomorph, wenn zwischen ihren Elementen eine derartige eineindeutige Zuordnung besteht, daß gleichzeitig mit den Elementen α_1 und α_1', α_2 und α_2' stets die Elemente $\alpha_1 + \alpha_2$ und $\alpha_1' + \alpha_2'$, $\Theta \cdot \alpha_1$ und $\Theta \cdot \alpha_1'$ einander zugeordnet sind. Zum Beweise von Satz 1 ordnen wir jedem Elemente α aus $\bar{G}$ seine G_1-Komponente $\alpha^{(1)}$ zu. Diese Zuordnung ist, wie aus einer oben gemachten Bemerkung folgt, jedenfalls derart, daß $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}$ und $\alpha_1 + \alpha_2$, sowie $\Theta \cdot \alpha_1^{(1)}$ und $\Theta \cdot \alpha_1$ einander zugeordnet sind, wenn das gleiche von $\alpha_i^{(1)}$ und α_i $(i = 1, 2)$ gilt. Es ist also nur noch zu zeigen, daß die hergestellte Zuordnung eineindeutig ist, und zu diesem Zwecke genügt der Nachweis, daß die Nullelemente von $\bar{G}$ und $G_1^{(\bar{G})}$ eineindeutig aufeinander bezogen sind. Das ist aber in der Tat der Fall, denn aus $0 = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}$ folgt $\alpha^{(1)} = 0$, und umgekehrt ergibt sich aus $\alpha = 0 + \alpha^{(2)}$ für jedes in $\bar{G}$ enthaltene Element α die Gleichung $\alpha = 0$, weil $\bar{G}$ und G_2 nach Voraussetzung elementefremd sein sollen. Satz 1 ist hiermit bewiesen.

Es soll jetzt weiter der Begriff der Restklassengruppe eingeführt werden, dem bei den gewöhnlichen A. G. der Begriff der Faktor- oder Quotientengruppe entspricht. Es sei G eine beliebige Gruppe, G_1 eine ihrer Untergruppen. *Dann nennen wir zwei Elemente α_1 und α_2 aus G „modulo G_1 kongruent" und schreiben $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (G_1)$, wenn die Differenz $\alpha_1 - \alpha_2$ in G_1 enthalten ist.* ($\alpha \equiv 0 (G_1)$ bedeutet also insbesondere, daß das Element α der Gruppe G_1 angehört.)

Der Begriff der Kongruenz ist, wie unmittelbar zu sehen, symmetrisch, reflexiv und transitiv, er befriedigt also alle Forderungen, die man an eine Gleichheitsdefinition stellt. Ferner folgt aus $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (G_1)$; $\beta_1 \equiv \beta_2 (G_1)$ stets $\alpha_1 + \beta_1 \equiv \alpha_2 + \beta_2 (G_1)$ und schließlich zieht, wie aus der Distributivität der Operatoren folgt, die Kongruenz $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (G_1)$ stets die Kongruenz $\Theta \cdot \alpha_1 \equiv \Theta \cdot \alpha_2 (G_1)$ nach sich.

Wir können daher die Klassen modulo G_1 kongruenter Elemente als

9) Vgl. R. Remak, Journ. für Math. 139 (1911), S. 297, Satz 3. F. Levi, Über Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen. Leipzig, B. G. Teubner (1917), S. 19.

einen neuen Bereich betrachten, in dem Addition und Multiplikation mit Operatoren folgendermaßen erklärt sind: Zwei Klassen werden addiert bzw. eine Klasse wird mit einem Operator multipliziert, indem man zwei beliebige ihrer Vertreter addiert, bzw. einen beliebigen Vertreter mit dem Operator multipliziert, und die durch das erhaltene Element dargestellte, eindeutig bestimmte Klasse als das Endergebnis der Operation ansieht.

Bei diesen Festsetzungen erfüllt das System der Klassen modulo G_1 *kongruenter Elemente, oder, wie wir in Zukunft sagen wollen, das System der „Restklassen modulo G_1“, die Bedingungen* I *und* II, *es stellt also eine Gruppe dar, die, wie bereits angekündigt, als „Restklassengruppe von G nach G_1“, oder symbolisch mit $G \mid G_1$, bezeichnet werden soll.*

Mit Hilfe des Begriffes der Restklassengruppe können wir dem Satz 1 eine etwas allgemeinere Fassung geben, von der wir später öfters Gebrauch machen werden. Wir können nämlich sagen: *Ist*

$$G = ((G_1, G_2, \ldots, G_r)) = ((G_1, \overline{G}_1)) \qquad (\overline{G}_1 = ((G_2, \ldots, G_r))),$$

und ist G' eine beliebige Untergruppe von G, so ist die G_1-Komponente von G' mit der Gruppe $G' \mid ([G', \overline{G}_1])$ isomorph. In der Tat, setzen wir der Kürze halber für eine beliebige Untergruppe A von G : $A \mid [G', \overline{G}_1] = A^*$, so haben wir $G^* = ((G_1^*, G_2^*, \ldots, G_r^*)) = ((G_1^*, \overline{G}_1^*))$ und es wird $G_1'^*$ die G_1^*-Komponente von G'^*, falls G_1' die G_1-Komponente von G' bedeutet. Weil nun die Gruppen $\overline{G}_1^*$ und G'^* evidenterweise elementefremd sind, da ja nach dem Durchschnitt von G' und $\overline{G}_1$ die Restklassengruppe gebildet wurde, so läßt sich Satz 1 anwenden, und es ergibt sich die Isomorphie von G'^* und $G_1'^*$. Die Gruppe $G_1'^*$ ist aber zu G_1' isomorph, wie man unmittelbar erkennt, wenn man jedem Element aus G_1' die durch es bestimmte Klasse in der Gruppe $G_1'^*$ zuordnet, und dabei beachtet, daß die Gruppen G_1 und $\overline{G}_1$ und folglich auch die Gruppen G_1' und $[G', \overline{G}_1]$ elementefremd sind. Aus der Transitivität des Isomorphiebegriffs ergibt sich mithin, daß die G_1-Komponente von G', G_1', zu der Restklassengruppe von G' nach $[G', \overline{G}_1]$ isomorph ist, und das war ja die zu beweisende Behauptung.

Zum Schluß dieses Paragraphen führen wir noch einige Bezeichnungen ein, die vor allem in § 2 von Nutzen sein werden. — Unter einer „Restklassengruppe von G“ ohne weiteren Zusatz wollen wir die Restklassengruppe nach einer beliebigen Untergruppe G_1 verstehen, und zwar reden wir insbesondere von einer „echten Restklassengruppe“, falls G_1 von der Nullgruppe verschieden ist.

Es sei ferner G_1 eine Untergruppe von G, H_1 eine solche von $G \mid G_1$. Dann erhalten wir eine weitere Untergruppe von G, wenn wir zu den Elementen von G_1 ein Repräsentantensystem der Gruppe H_1 und ferner alle linearen Verbindungen dieser Repräsentanten mit den Elementen von G_1 hinzufügen. Die so konstruierte Untergruppe soll mit $G_1 \frown H_1$ bezeichnet werden. Entsprechend wollen wir unter $G_1 \frown H_1 \frown H_2$ diejenige Gruppe verstehen, die wir erhalten, wenn wir aus $G \mid (G_1 \frown H_1)$ eine Untergruppe H_2 herausgreifen und dann nach dem eben auseinandergesetzten Schema $(G_1 \frown H_1) \frown H_2$ bilden. Das Weglassen der Klammer ist berechtigt, weil wir zur selben Gruppe gelangen, wenn wir aus $G \mid G_1$ die Gruppe $H_1 \frown H_2$ herausgreifen und dann zu $G_1 \frown (H_1 \frown H_2)$ übergehen.

Auf Grund der eben aufgestellten Bezeichnungsweise können wir von $G_1 \frown H_1 \frown H_2$ ausgehend weiter eine auch ohne Klammer eindeutig bestimmte Gruppe $G_1 \frown H_1 \frown H_2 \frown H_3$ aufbauen usw. Die hiermit eingeführte Bezeichnungsweise wird vor allem zur glatten Darstellung einiger Beweise von § 2 nützlich sein.

§ 2.

V. e. A. G.

Um diejenigen v. A. G. zu charakterisieren, die sinnvollerweise als Verallgemeinerung der *endlichen* Abelschen Gruppen angesehen werden können, führen wir folgende Bezeichnungsweise ein: *Unter einer der Gruppe G entnommenen echten Untergruppenkette (Obergruppenkette) verstehen wir eine Folge von Gruppen $G_1, G_2, \ldots$, die sämtlich Untergruppen von G sind, und bei denen außerdem allgemein G_i eine echte Untergruppe (Obergruppe) von G_{i-1} darstellt. Wir definieren dann:*

Eine v. A. G. heißt verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppe (v. e. A. G.), wenn sie keine ins Unendliche laufende Unter- oder Obergruppenkette enthält.

Satz 2. *Eine v. e. A. G. ist zu keiner Restklassengruppe einer echten Untergruppe isomorph.*

Wir zeigen einfach, daß jede Gruppe, die zu einer Restklassengruppe einer echten Untergruppe isomorph ist, eine ins Unendliche laufende echte Untergruppenkette enthält. Es sei nämlich G_1 die in Betracht kommende echte Untergruppe von G, und es sei H_1 diejenige Untergruppe von G_1, für die $G_1 \mid H_1 = J_1$ zu G isomorph wird. Bilden wir alsdann G isomorph auf J_1 ab, so entspricht dabei der Gruppe G_1 eine echte Untergruppe G_2 von J_1, und es enthält G_2 eine Untergruppe H_2, derart, daß $G_2 \mid H_2 = J_2$ zu G isomorph wird. Als erste Glieder der zu konstruierenden Untergruppenkette wählen wir jetzt $U_1 = G_1, U_2 = H_1 \frown G_2$. U_2 ist eine Untergruppe von U_1, da ja G_2 eine solche von $G_1 \mid H_1$ ist. Um das dritte Glied der Untergruppenkette zu gewinnen, bilden wir G isomorph auf J_2 ab. Dabei entspricht G_1 eine echte Untergruppe G_3 von J_2 und H_1 eine

Untergruppe von H_3 von G_3, und es wird $G_3 | H_3 = J_3$ zu G isomorph. Setzen wir jetzt $U_3 = H_1 \cap H_2 \cap G_3$, so wird U_3 eine echte Untergruppe von U_2, weil G_3 eine echte Untergruppe von $G_2 | H_2$ und folglich $H_2 \cap G_3$ eine solche von G_2 ist. Indem wir jetzt von dem zwischen J_3 und G bestehenden Isomorphismus aus weiter schließen, konstruieren wir Glied für Glied die gesuchte Untergruppenkette und gelangen so zum Beweise unseres Satzes.

Satz 3. *Eine v. e. A. G. ist zu keiner Untergruppe einer echten Restklassengruppe isomorph.*

Ähnlich wie wir bei Satz 2 eine Untergruppenkette aufbauten, konstruieren wir diesmal zu jeder der Bedingung von Satz 3 nicht genügenden Gruppe eine in ihr enthaltene unendliche echte Obergruppenkette. Es sei G_1 eine von der Nullgruppe verschiedene Untergruppe, derart, daß G zu einer Untergruppe J_1 von $G | G_1$ isomorph wird. Bilden wir alsdann G isomorph auf J_1 ab, so entspricht der Gruppe G_1 eine von Null verschiedene Untergruppe G_2 von J_1, und es wird G zu einer Untergruppe J_2 von $J_1 | G_2$ isomorph. Als Anfangsglieder der zu konstruierenden Obergruppenkette wählen wir jetzt $O_1 = G_1$, $O_2 = G_1 \cap G_2$. Es ist dann O_2 echte Obergruppe von O_1, weil G_2 zu G isomorph und folglich von Null verschieden ist. Wir bilden nun weiter G isomorph auf J_2 ab. Dabei entspricht der Gruppe G_1 eine von Null verschiedene Untergruppe G_3 von J_2 und es ist G zu einer Untergruppe J_3 von $J_2 | G_3$ isomorph. Setzen wir nun $O_3 = G_1 \cap G_2 \cap G_3$, so wird O_3 eine echte Obergruppe von O_2. Man sieht, es läßt sich tatsächlich auf Grund des Isomorphismus von G_1 und J_1 eine in G enthaltene unendliche echte Obergruppenkette konstruieren, Satz 3 ist also richtig. Wir bemerken noch:

Ist G eine v. e. A. G., so ist auch jede Unter- und jede Restklassengruppe von G eine v. e. A. G.

Für die Untergruppen ist die Behauptung klar, für die Restklassengruppen folgt sie aus der Tatsache, daß $H \cap G_1$, $H \cap G_2$ ... eine echte Unter- oder Obergruppenkette aus G darstellt, falls $G_1, G_2, \ldots$ eine solche aus $G | H$ ist.

Satz 4. *Jede v. e. A. G. läßt sich als direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Summanden darstellen.*

Zum Beweise unseres Satzes zeigen wir, daß sich aus jeder Gruppe, für die eine derartige Darstellung nicht besteht, eine unendliche echte Untergruppenkette herausgreifen läßt.

In der Tat, ist A eine solche Gruppe, so ist A sicher zerlegbar, es gilt also eine Gleichung $A = ((A_1, A_2))$, wobei A_1 und A_2 echte Untergruppen von A sind. Wären nun A_1 und A_2 beide als direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Summanden darstellbar, so gälte das gleiche von A. Es darf daher angenommen werden, daß A_1 keine derartige Summendarstellung zuläßt, und daß mithin sicher eine Gleichung $A_1 = ((A_{11}, A_{12}))$ besteht, wobei A_{11} und A_{12} echte Untergruppen von A sind, und wobei bei geeigneter Bezeichnung A_{11} keine direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Summanden ist. Wir wählen nun A, A_1, A_{11} als Anfangsglieder der zu bildenden Untergruppenkette, und setzen diese Kette fort, indem wir auf A_{11} dieselbe Schlußweise anwenden, wie früher auf A und A_1. Bei dieser Methode des Weiterschreitens kommen wir offenbar nie zum Ende, es kann also A keine v. e. A. G. sein, d. h. jede v. e. A. G. stellt, wie behauptet, die direkte Summe endlich vieler unzerlegbarer Summanden dar.

Eine solche Darstellung wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein, wir werden aber den grundlegenden Satz beweisen:

Die Darstellung einer v. e. A. G. durch unzerlegbare Summanden ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Ehe wir zum Beweise dieses Fundamentalsatzes übergehen, soll noch auf die beiden wichtigsten Typen von v. e. A. G. eingegangen werden, die außer den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen in der Literatur vorkommen, nämlich bis auf die vollständig reduziblen Gruppen und auf die Gruppen vom endlichen Rang.

§ 3.

Vollständig reduzible v. A. G.

Gemäß dem in § 2 aufgestellten Programm wenden wir uns zunächst zu den in der Literatur als „vollständig reduzibel" bezeichneten v. A. G. *Die charakteristische Eigenschaft dieser Gruppen liegt darin, daß sie sich als direkte Summe von „irreduziblen Gruppen" darstellen lassen, d. h. von solchen Gruppen, die außer der Nullgruppe keine echte Untergruppe enthalten.* Um nachzuweisen, daß die vollständig reduziblen (in Zukunft kurz v. red.) Gruppen tatsächlich zu den im vorangehenden Paragraphen eingeführten v. e. A. G. gehören, beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 5. *Ist $G = ((P_1, P_2, \ldots, P_r))$ eine beliebige v. red. Gruppe, G_1 eine ihrer Untergruppen, so ist G_1 ebenfalls v. red., wir haben mithin $G_1 = ((P_1', P_2', \ldots, P_s'))$, wobei die P_i' ebenso wie die P_i irreduzible Gruppen bedeuten. Dabei ist $s \leqq r$ und man kann $r - s$ irreduzible Gruppen $P_{s+1}', \ldots, P_r'$ so bestimmen, daß $G = ((P_1', P_2', \ldots, P_r')) = ((P_1, P_2, \ldots, P_r))$ wird. Bei geeigneter Numerierung sind alsdann P_i und P_i' isomorph.*

Satz 5 kann auch kurz so formuliert werden: „Der (in § 2 formulierte) Fundamentalsatz ist für v. red. Gruppen gültig. Darüber hinaus ist jede Untergruppe G_1 von G v. red. und es läßt sich eine direkte Summendarstellung von G finden, bei der G_1 als Komponente auftritt.“ Wir führen den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion, wir nehmen also an, unser Satz sei für Gruppen mit höchstens $r-1$ unzerlegbaren Summanden bereits bewiesen — für irreduzible Gruppen ist er ja offenbar richtig — und zeigen dann seine Gültigkeit für Gruppen mit r unzerlegbaren Komponenten. Nehmen wir an, es sei die Numerierung so gewählt, daß G_1 zu der Gruppe $((P_1, P_2, \ldots, P_t)) = G'(t \leqq r)$ nicht elementefremd ist, während es mit allen den Gruppen, die aus G' durch Weglassen eines P_i entstehen, keine von 0 verschiedene Untergruppe gemein hat. Alsdann ist nach Satz 1 von § 1 die von 0 verschiedene Gruppe $[G', G_1] = P_1'$ zu ihrer P_1-Komponente (und entsprechend zu ihrer P_i-Komponente für $i = 2, 3, \ldots, t$) isomorph, und wegen der Irreduzibilität von P_1 ergibt sich daraus weiter, daß P_1 mit der P_1-Komponente von P_1' identisch sein muß. Aus dieser Tatsache folgt aber leicht die Gültigkeit der Gleichung $G = ((P_1', P_2, \ldots, P_r))$. Zunächst ist nämlich P_1' zu $((P_2, \ldots, P_r))$ elementefremd; denn andernfalls wäre bereits $[P_1', ((P_2, \ldots, P_t))] \neq 0$, da ja P_1' eine Untergruppe von G' darstellt, und daraus folgte weiter $[G_1, ((P_2, \ldots, P_t))] \neq 0$ entgegen unseren Voraussetzungen über die Bestimmung von G'.

Ferner muß $((P_1', P_2, \ldots, P_r))$ die ganze Gruppe P_1 enthalten. Ist nämlich α ein beliebiges Element aus P_1, so muß α die P_1-Komponente eines Elementes aus P_1' sein, d. h. es gibt in $((P_2, \ldots, P_t))$ ein Element γ, für das eine Kongruenz $\alpha + \gamma = \beta \equiv 0\ (P_1')$ gilt und daraus folgt sofort $\alpha = \beta - \gamma \equiv 0\ (((P_1', P_2, \ldots, P_r)))$. Aus der nunmehr voll bewiesenen Gleichung $G = ((P_1', P_2, \ldots, P_r))$ ergibt sich weiter $G_1 = ((P_1', G_1'))$ für $G_1' = [G_1, ((P_2, \ldots, P_r))]$.

Nunmehr ist uns der Ansatz zum Induktionsschluß gegeben: G_1' stellt eine Untergruppe der v. red. Gruppe $((P_2, \ldots, P_r))$ dar, und da diese Gruppe nur $r-1$ unzerlegbare Komponenten besitzt, so darf auf G_1' der Satz 5 angewandt werden. Wir können mithin $G_1' = ((P_2', \ldots, P_s'))\ (s \leqq r)$ setzen, und dürfen annehmen, daß sich $r-s$ Gruppen $P_{s+1}', \ldots, P_r'$ so bestimmen lassen, daß die Gleichung $G' = ((P_2', P_3', \ldots, P_r'))$ besteht, wobei stets bei geeigneter Numerierung P_i und P_i' $(i = 2, 3, \ldots, r)$ isomorph ausfallen. Daraus folgt aber sofort die Richtigkeit von Satz 5 für die aus r Komponenten bestehende Gruppe G. Wir haben nämlich: $G_1 = ((P_1', P_2', \ldots, P_s'))$; $G = ((P_1, P_2, \ldots, P_r)) = ((P_1', P_2', \ldots, P_r'))$ und wegen des bereits bewiesenen Isomorphismus von P_1 und P_1' sind P_i und P_i' für jedes i isomorph.

Satz 5 gewährt uns einen vollen Überblick über den Aufbau einer

v. red. Gruppe aus ihren unzerlegbaren Komponenten[10]). Insbesondere ergibt sich, daß jede Untergruppe einer v. red. Gruppe G, die ebensoviel unzerlegbare Komponenten wie G besitzt, mit G identisch sein muß, und da nach Satz 5 außerdem alle Untergruppen einer v. red. Gruppe gleichfalls v. red. sind, so erkennen wir, daß jede einer v. red. Gruppe mit r Komponenten entnommene echte Unter- oder Obergruppenkette nach höchstens $r+1$ Schritten abbrechen muß.

Die v. red. Gruppen gehören also tatsächlich zu den v. e. A. G. im Sinne von § 2.

Wir wenden uns nunmehr zu den Gruppen vom endlichen Rang, bei denen man zwar die Zugehörigkeit zu den v. e. A. G. beinahe unmittelbar erkennen kann, bei denen aber der Beweis des Fundamentalsatzes wesentlich größere Schwierigkeiten macht, als bei den bisher behandelten v. red. Gruppen.

§ 4.

V. A. G. von endlichem Rang.

Während bisher über den Operatorenbereich keinerlei beschränkende Annahme gemacht wurde, wollen wir jetzt voraussetzen, *daß O aus einem Bereich O', der keinen weiteren Bedingungen unterworfen wird, und aus den Elementen eines Körpers $\mathfrak{K}$ besteht.* Dabei bedeutet ein Körper entsprechend der gebräuchlichen Ausdrucksweise ein System von Elementen $a_1, a_2, \ldots$, in dem Addition und Multiplikation in üblicher Weise erklärt sind, und in dem insbesondere die Umkehrungen dieser beiden Operationen, die Subtraktion und die Division, mit Ausnahme der Division durch 0, allgemein ausgeführt werden können[11]).

Die Operatoren von O' wollen wir wie in § 1 mit Θ, die Elemente von $\mathfrak{K}$ hingegen wollen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ Elemente einer Gruppe G, so wollen wir sie linear abhängig nennen, wenn eine Gleichung $a_1 \cdot \alpha_1 + a_2 \cdot \alpha_2 + \ldots + a_n \cdot \alpha_n = 0$ mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ besteht, wenn sich

---

[10]) Was das Verhältnis von Satz 5 zur bisher erschienenen Literatur angeht, so ist folgendes zu bemerken: Daß jede v. red. Gruppe bis auf Isomorphie eindeutig als direkte Summe irreduzibler Gruppen darstellbar ist, war in anderer Ausdrucksweise schon lange bekannt. Vgl. z. B. A. Loewy, Math. Ann. 62 (1906), S. 116 oder Noether-Schmeidler, Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 19ff. Hingegen habe ich Satz 5 in seiner allgemeinen Fassung in der Literatur nirgends gefunden.

[11]) Man denke z. B. an den Körper der rationalen oder an den der reellen Zahlen, oder auch an einen Körper, der außer Konstanten noch Funktionen einer Variablen enthält.

also ein α_i linear durch die übrigen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ ausdrücken läßt; im andern Falle sollen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ linear unabhängig heißen.

Wir wollen nun sagen: *Die Gruppe G besitzt den endlichen Rang n, wenn es in G genau n, aber nicht mehr unabhängige Elemente gibt*[12]).

Besitzt G den Rang n und sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ linear unabhängige Elemente aus G, läßt sich also jedes in G vorkommende Element in der Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \alpha_i$ darstellen, so nennen wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von G und schreiben $G = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Aus elementaren Determinantensätzen ergibt sich: Jede Basis von G geht aus einer fest gewählten durch eine lineare Transformation mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ und mit nicht verschwindender Determinante hervor.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \leqq n)$ linear unabhängige Elemente aus G, so lassen sich $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ stets so bestimmen, daß $G = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ wird.

Ist G_1 eine echte Untergruppe von G, so muß, wie unmittelbar einleuchtet, der Rang von G_1 niedriger sein als der von G. Daraus folgt sofort, daß im Bereich der Gruppen von endlichem Rang jede echte Unter- oder Obergruppenkette im Endlichen abbricht, *daß mithin die Gruppen von endlichem Rang zu den v. e. A. G. gehören.*

Es sollen nun noch einige Sätze abgeleitet werden, die den Zusammenhang zwischen den Gruppen von endlichem Rang und den endlichen Abelschen Gruppen in ein scharfes Licht setzen.

Satz 6. *Bezeichnet n_i den Rang von G_i $(i = 1, 2)$, d den Rang von $[G_1, G_2]$ und s denjenigen von (G_1, G_2), so ist $n_1 + n_2 = s + d$.*[13])

Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ eine Basis von $[G_1, G_2]$. Dann kann man nach einer oben gemachten Bemerkung die Elemente $\alpha_{d+1}^{(i)}, \alpha_{d+2}^{(i)}, \ldots, \alpha_{n_i}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ so bestimmen, daß $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}^{(i)}, \ldots, \alpha_{n_i}^{(i)}$ eine Basis von G_i wird. Unter diesen Umständen stellt aber $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{n_1}^{(1)}, \alpha_{d+1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{n_2}^{(2)}$ eine Basis linear unabhängiger Elemente von (G_1, G_2) dar, und daraus folgt, wie behauptet, $s = n_1 + n_2 - d$; $s + d = n_1 + n_2$.

Aus Satz 6 folgert man leicht: *Im Bereiche der Gruppen von endlichem Rang kann man die direkte Summe auch folgendermaßen definieren:*

---

[12]) Der nur aus dem Nullelement bestehenden „Nullgruppe" schreiben wir den Rang 0 zu.

[13]) Man erhält den entsprechenden Satz aus der Theorie der gewöhnlichen endlichen A. G., wenn man „Produkt" an Stelle von „Summe", $\cdot$ an Stelle von $+$, $:$ an Stelle von $-$ setzt. Zwischen den Gruppen von endlichem Rang und den endlichen A. G. bestehen in mancher Hinsicht ähnliche Zusammenhänge wie zwischen der Galoisschen Gruppe einer algebraischen Gleichung und der Picard-Vessiotschen Gruppe einer Differentialgleichung, oder wie zwischen dem Restklassensystem nach einem Ideal algebraischer Zahlen und dem nach einem Ideal algebraischer Funktionen.

Die Summe der n Gruppen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ *heißt direkte Summe, wenn ihr Rang gleich der Summe der Rangzahlen der einzelnen Summanden ist.*

Aus der eben gemachten Bemerkung ergibt sich mühelos, daß sich eine Gruppe von endlichem Rang stets als direkte Summe von endlich vielen (höchstens n) unzerlegbaren Summanden darstellen läßt. Um die Richtigkeit dieser Tatsache einzusehen, braucht man nur zu bedenken, daß jede Gruppe vom Range 1 unzerlegbar ist. Im übrigen aber ergibt sich, wie schon öfters betont, bei den Gruppen von endlichem Rang für den Beweis des Fundamentalsatzes keine wesentliche Erleichterung. Wir führen daher diesen Beweis in dem folgenden Paragraphen gleich für den allerallgemeinsten Fall einer beliebigen v. e. A. G.

§ 5.

Theorie der Zurückleitungsgruppen.

Um uns die zum Beweise des Fundamentalsatzes nötigen Hilfsmittel zu verschaffen, müssen wir zunächst den Fall ins Auge fassen, daß für die gegebene Gruppe zwei Darstellungen $G = ((A, B)) = ((C_1, C_2))$ bestehen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um folgende Frage: Wann ist eine der bei zwei derartigen Darstellungen auftretenden Komponentengruppen — im folgenden wollen wir dabei insbesondere stets an die Gruppe A denken — zerlegbar? Um für die Beantwortung dieser Frage ein brauchbares Kennzeichen zu gewinnen, genügt nicht die abgesonderte Untersuchung der Gruppe A allein, sondern es muß die Tatsache ausgenützt werden, daß A als Komponentengruppe bei einer direkten Summendarstellung von G auftritt, wir müssen infolgedessen unser Augenmerk zunächst auf den Aufbau der Gruppe B, der Ergänzungsgruppe von A, richten.

Zur übersichtlichen Darstellung soll in diesem Paragraphen ein für allemal unter α bzw. β bzw. γ bzw. δ ein beliebiges Element aus der Gruppe A bzw. B bzw. C_1 bzw. C_2 verstanden werden, ferner bedeute η stets ein Element der Gruppe $[A, C_1]$, ϑ ein solches der Gruppe $[A, C_2]$. Wir führen nun für die Elemente von B (gleiches könnte natürlich auch für die von A geschehen) den Begriff der *Zurückleitung* ein[14]).

Wegen des Bestehens der Gleichung $G = ((C_1, C_2))$ existiert für ein beliebiges Element β eine eindeutige Darstellung $\beta = \gamma + \delta$, und für das

[14]) Der Name Zurückleitung ist der Graßmannschen „Ausdehnungslehre" entnommen, trotzdem er dort eine andere Bedeutung hat als im Texte. Die Verwendung des Namens schien unbedenklich, da unsere Untersuchungen in keinerlei Zusammenhang mit den Graßmannschen Entwicklungen stehen, da also eine Verwechslung nicht zu befürchten ist.

Element γ haben wir infolge der Gleichung $G = ((A, B))$ eine eindeutige Darstellung $\gamma = \alpha^{(1)} + \beta^{(1)}$. *Das Element $\beta^{(1)}$ soll als die erste Zurückleitung des Elementes β hinsichlich der Gruppe C_1 bezeichnet werden, entsprechend verstehen wir unter der ersten Zurückleitung von β hinsichtlich C_2 das durch die Gleichung $\delta = \alpha^{(1)'} + \beta^{(1)'}$ eindeutig bestimmte Element $\beta^{(1)'}$.*[15]) *Als zweite Zurückleitung von β hinsichtlich C_1 bezeichnen wir die erste Zurückleitung von $\beta^{(1)}$ hinsichtlich C_1, allgemein definieren wir die n-te Zurückleitung als erste Zurückleitung der $n-1$-ten.*

Ist $\bar{B}$ eine beliebige Untergruppe von B, so stellt die Gesamtheit derjenigen Elemente aus B, die n-te Zurückleitung eines Elementes aus $\bar{B}$ hinsichtlich C_k $(k = 1, 2)$ sind, eine Untergruppe $\bar{B}_k^{(n)}$ von B dar[16]), die n-te Zurückleitung von $\bar{B}$ hinsichtlich C_k genannt werden soll. Wir richten unser Augenmerk insbesondere auf die Zurückleitungen $B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, \ldots, B_2^{(1)}, B_2^{(2)}, \ldots$ von B und beweisen:

$B_k^{(n)}$ ist eine (echte oder unechte) Untergruppe von $B_k^{(n-1)}$ $(k = 1, 2)$.

In der Tat stellt jedes Element aus $B_k^{(n)}$ die $n-1$-te Zurückleitung hinsichtlich C_k eines Elementes aus $B_k^{(1)}$ dar, und muß daher in $B_k^{(n-1)}$ enthalten sein. — Die Ketten $B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, \ldots$ $(k = 1, 2)$ müssen infolge der Definition der v. e. A. G. beide im Endlichen abbrechen, es muß also für zwei endliche Zahlen m_1 und m_2 und für beliebiges s stets $B_k^{(m_k+s)} = B_k^{(m_k)}$ $(k = 1, 2)$ sein. Um den Aufbau von $B_k^{(m_k)} = B_k$ näher kennen zu lernen, führen wir zwei neue Untergruppen von B ein, die „Endlichkeitsuntergruppen" E_1 und E_2, die sich im Verlauf der Untersuchung als die Restklassengruppen von B nach B_2 bzw. B_1 herausstellen werden.

E_k $(k = 1, 2)$ besteht aus der Gesamtheit der Elemente, die hinsichtlich C_k nur endlich viele von Null verschiedene Zurückleitungen besitzen.

Über den Aufbau von E_k ist folgendes zu bemerken: Bezeichnen wir mit $E_{k,i}$ die Untergruppe von B, die aus allen denjenigen Elementen besteht, für die die i-te und folglich jede höhere Zurückleitung verschwindet, so ist $E_{k,i}$ offenbar eine (echte oder unechte) Obergruppe von $E_{k,i-1}$,

---

[15]) Das Element $\beta^{(1)}$ und ebenso $\beta^{(1)'}$ hängt selbstverständlich nicht nur von C_1 bzw. C_2, sondern auch von der Darstellung von G durch C_1 und C_2 ab, d. h. $\beta^{(1)}$ würde sich im allgemeinen ändern, wenn wir an Stelle der Darstellung $G = ((C_1, C_2))$ eine neue Darstellung $G = ((C_1, C_2'))$ setzten. Gleichwohl scheint es nicht nötig, in der Bezeichnung auf diese Abhängigkeit hinzuweisen, da im Texte immer nur von einer festen Darstellung $G = ((C_1, C_2))$ die Rede ist.

[16]) Die Gruppeneigenschaft von $\bar{B}_k^{(n)}$ wird mit Hilfe der Distributivität der Operatoren nach dem üblichen Schema bewiesen. Ein ausführliches Eingehen darauf ist wohl überflüssig.

und es stellt E_k die Vereinigungsgruppe der Gruppen $E_{k,i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ dar. Da nun bei den v. e. A. G. jede Obergruppenkette im Endlichen abbricht, so gibt es in diesem Falle stets zwei natürliche Zahlen m_1 und m_2,[17]) so daß $E_{k,m_k} = E_{k,m_k+1} = \ldots = E_k$ wird. Aus dieser Tatsache folgt leicht, daß bei den v. e. A. G. die Gruppe E_k auch definiert werden kann als *die größte Untergruppe von B, die die Eigenschaft besitzt, daß eine ihrer Zurückleitungen hinsichtlich C_k verschwindet*[18]).

Für das Folgende ist noch eine weitere, nicht auf v. e. A. G. beschränkte Definition der Gruppen $E_{k,i}$ wesentlich. *Wir setzen $E_{1,0} = E_{2,0} = (0)$ und definieren dann allgemein $E_{k,i}$ als die Gesamtheit derjenigen Elemente aus B, die die Eigenschaft besitzen, daß ihre C_k-Komponente in der Gruppe $((A, E_{k,i-1}))$ enthalten ist*[19]).

Um die Übereinstimmung der beiden Definitionen etwa für $E_{1,i}$ einzusehen, haben wir uns nur zu überlegen, daß für das Bestehen der Kongruenz $\beta = \gamma + \delta \equiv 0\,(E_{1,i})$ die Richtigkeit der Kongruenz $\gamma \equiv 0\,(((E_{1,i-1}, A)))$ notwendig und hinreichend ist, falls man gemäß der ursprünglichen Definition unter $E_{k,i}$ $(i > 0)$ die Gesamtheit der Elemente mit verschwindender i-ter Zurückleitung, und der $E_{1,0}$ aber die Nullgruppe versteht. Das ist in der Tat der Fall. Setzt man nämlich $\gamma = \alpha^{(1)} + \beta^{(1)}$, so muß im Falle $\gamma + \delta \equiv 0\,(E_{1,i})$ das Element $\beta^{(1)}$ eine verschwindende $i-1$-te Zurückleitung besitzen und folglich der Gruppe $E_{1,i-1}$ angehören, während umgekehrt aus der Kongruenz $\beta^{(1)} \equiv 0\,(E_{1,i-1})$ das Verschwinden der i-ten Zurückleitung von β und also die Kongruenz $\gamma + \delta \equiv 0\,(E_{1,i})$ folgt. Das eben gewonnene Resultat dient zum Beweise von

Satz 7. *Die Endlichkeitsuntergruppen sind elementefremd*[20]).

Da jedes Element aus E_k in einer der Gruppen $E_{k,i}$ vorkommt, so genügt zum Beweise von Satz 7 der Nachweis, daß für beliebiges i_1 und i_2 die Gruppen E_{1,i_1} und E_{2,i_2} elementefremd sind. Die Richtigkeit dieser Tatsache wiederum kann in der Weise erhärtet werden, daß wir zeigen, daß aus der Elementefremdheit von E_{1,i_1} und E_{2,i_2} auch die Elementefremdheit von E_{1,i_1} und E_{2,i_2+1} (und entsprechend die von E_{1,i_1+1} und E_{2,i_2}) folgt; denn die Gruppen $E_{1,0}$ und $E_{2,0}$ sind ja gleich der Nullgruppe

[17]) Die Zahlen m_1 und m_2 sind, wie sich später zeigen wird, mit den bei Einführung von B_1 und B_2 früher erwähnten Zahlen m_1 und m_2 identisch.

[18]) Bei Gruppen mit unendlichem Rang wird im allgemeinen für E_k keine endliche Zurückleitung verschwinden, obwohl jede der Gruppen $E_{k,i}$ nur endlich viele von Null verschiedene Zurückleitungen besitzt

[19]) Von der hier gegebenen Definition der Gruppe E_k ging ich ursprünglich aus. *Die weiter oben gegebene auf dem Zurückleitungsbegriff beruhende Definition, mit deren Hilfe sich der Beweis wesentlich übersichtlicher gestaltet, verdanke ich E. Noether.*

[20]) Beim Beweise von Satz 7 wird die Voraussetzung des endlichen Ranges nicht benutzt.

und daher sicher elementefremd. Es sei also $\gamma+\delta\equiv 0\,([E_{1,i_1}, E_{2,i_2+1}])$; $[E_{1,i_1}, E_{2,i_2}]=0$. Dann existieren zwei Elemente $\beta_1\equiv 0\,(E_{1,i-1})$ und $\beta_2\equiv 0\,(E_{2,i-2})$, die den Kongruenzen $\gamma+\beta_1\equiv\delta+\beta_2\equiv 0\,(A)$ genügen, wir haben mithin: $\gamma+\delta+\beta_1+\beta_2\equiv 0\,(A)$, und daraus folgt wegen der Elementefremdheit von A und B die Gleichung $\gamma+\delta+\beta_1+\beta_2=0$. Wir haben mithin $\gamma+\delta+\beta_1\equiv-\beta_2\,(E_{1,i_1})$ und daraus folgt wegen $[E_{1,i_1}, E_{2,i_2}]=0$ die Gleichung $\gamma+\delta+\beta_1=0$, also $\gamma+\delta\equiv-\beta_1\,(E_{1,i-1})$. Es gehört also $\gamma+\delta$ bereits der Gruppe $E_{1,i-1}$ an, und durch Fortsetzung des oben durchgeführten Schlußverfahrens beweisen wir die Gültigkeit der Gleichung $\gamma+\delta=0$. Hiermit ist die Gleichung $[E_{1,i_1}, E_{2,i_2+1}]=0$ und damit durch Induktion der Satz 7 bewiesen.

Satz 8. *Die l-te Zurückleitung von B hinsichtlich C_k, $B_k^{(l)}$, ist der Restklassengruppe $B\,|\,E_{k,l}$ isomorph*[21]).

Zum Beweise von Satz 8 ordnen wir jedem Elemente aus B seine l-te Zurückleitung zu. Auf diese Weise erhalten wir zwischen B und $B_k^{(l)}$ eine Beziehung, die man in üblicher Ausdrucksweise einen „meroedrischen Isomorphismus" nennen kann, denn durch die angegebene Zuordnung entsprechen die Elemente $\beta_1+\beta_2$ und $\beta_1'+\beta_2'$, $\Theta\cdot\beta$ und $\Theta\cdot\beta'$ einander, falls β_1 und β_1', β_2 und β_2', β und β' einander zugeordnet sind. Der einzige Grund, warum wir nicht von einem gewöhnlichen (holoedrischen) Isomorphismus reden können, ist der, daß die Elemente von B und $B_k^{(l)}$, also insbesondere die Nullelemente, nicht eineindeutig aufeinander bezogen sind. Es entspricht zwar dem Nullelement aus B eindeutig das Nullelement aus $B_k^{(l)}$, aber umgekehrt entspricht dem Nullelement aus $B_k^{(l)}$ die Gesamtheit derjenigen Elemente, deren l-te Zurückleitung hinsichtlich C_k verschwindet, die also der Gruppe $E_{k,l}$ angehören. Die eben geschilderte Art der Zuordnung zwischen B und $B_k^{(l)}$ ist aber genau mit derjenigen identisch, die man zwischen B und der Gruppe $B\,|\,E_{k,l}$ herstellen kann, denn diese Restklassengruppe entsteht ja einfach dadurch aus B, daß man alle Elemente, deren l-te Zurückleitung verschwindet, dem Nullelement gleichsetzt. Die Gruppen $B_k^{(l)}$ und $B\,|\,E_{k,l}$ sind also in der Tat isomorph.

Nehmen wir wie oben an, daß $E_{k,1}, E_{k,2}, \ldots, E_{k,m_k}$ alle verschieden sind, so fallen die Gruppen $B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, \ldots, B_k^{(m_k)}=B_k$ alle verschieden aus und B_k wird zu der Gruppe $B\,|\,E_k$ isomorph. B_k kann nun, wegen $E_k=E_{k,m_k}$, kein von Null verschiedenes Element mit einer verschwindenden endlichen Zurückleitung enthalten und ist folglich zu E_k elementefremd. Man kann daher ein Repräsentantensystem von $B\,|\,E_k$ so bestimmen, daß es alle Elemente aus B_k enthält. Bei dieser Wahl stellt B_k eine zu $B\,|\,E_k$ isomorphe Untergruppe von $B|E_k$ dar, und muß wegen der

21) Satz 8 gilt ebenso wie Satz 7 für ganz beliebige v. A. G.

Endlichkeit mit $B|E_k$ identisch sein, d. h. wir haben die Gleichung $G = ((E_k, B_k))$. Mit Hilfe dieser wichtigen Beziehung beweisen wir weiter:

Satz 9. *Es existiert eine direkte Summenzerlegung* $B = ((E_1, E_2, U))$.

Zum Beweise unseres Satzes überzeugen wir uns zunächst davon, daß E_2 in B_1 (und entsprechend E_1 in B_2) enthalten ist, und weisen zu diesem Zwecke nach, daß *die Zurückleitungsgruppe von E_2 nach C_1 mit E_2 identisch ist.* Wir nehmen an, es sei bereits gezeigt, daß $E_{2,i-1}$ mit seiner Zurückleitung hinsichtlich C_1 zusammenfällt, und zeigen dann, daß unter dieser Annahme das gleiche für $E_{2,i}$ gilt. In der Tat, ist $\beta = \gamma + \delta \equiv 0\,(E_{2,i})$, so gibt es ein $\beta_1 \equiv 0\,(E_{2,i-1})$, so daß $\delta + \beta_1 = \alpha \equiv 0\,(A)$ wird, wir haben also $\gamma = -\alpha + (\gamma + \delta) + \beta_1 = -\alpha + \beta^{(1)}$, $\beta^{(1)} = \beta + \beta_1 \equiv 0\,(E_2)$. Die Zurückleitung jedes Elementes aus E_2 hinsichtlich C_1 ist daher in E_2 enthalten. Da ferner $\beta^{(1)}$ die Zurückleitung eines Elementes aus $E_{2,i}$ darstellt, und da nach Voraussetzung wegen $\beta = 0\,(E_{2,i-1})$ dasselbe für β_1 gilt, so stellt auch das beliebige Element $\gamma + \delta = \beta$ aus $E_{2,i}$ die Zurückleitung eines Elementes aus $E_{2,i}$ dar. Da nun $E_{2,0} = (0)$ evidenterweise mit seiner Zurückleitung hinsichtlich C_1 zusammenfällt, so ist hiermit durch Induktion gezeigt, daß das gleiche für jedes $E_{2,i}$ und folglich auch für E_2 gilt. E_2 tritt daher in jeder Zurückleitung von B nach C_1, insbesondere auch in B_1 auf.

Mit Hilfe des gewonnenen Ergebnisses ergibt sich nun leicht der Beweis von Satz 9. Wir wollen die Elemente ξ so bestimmen, daß sie die Vertreter der Gruppe $B_1|E_2$ werden, d. h. wir wollen aus jeder Klasse modulo E_2 kongruenter Elemente von B_1 genau einen Repräsentanten ξ herausgreifen. Dann besitzt das System S der ξ folgende Eigenschaften: 1. S stellt nicht nur die Gruppe $B_1|E_2$, sondern auch die Gruppe $B|((E_1, E_2))$ dar. (Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung $B = ((E_1, B_1))$.) 2. Die ξ sind modulo E_2 vollständig willkürlich, d. h. zu jedem ξ kann ein beliebiges Element aus E_2 zugefügt werden. 3. Das System der ξ besitzt, wie selbstverständlich, modulo E_2 Gruppeneigenschaft. — Man kann nun in den bisherigen Untersuchungen überall die Zahlen 1 und 2 vertauschen, und daraus ergibt sich leicht, *daß man das System S der ξ so bestimmen kann, daß es nicht nur modulo E_1, sondern auch modulo E_2 Gruppeneigenschaft besitzt.*

Es bezeichne nämlich $S^{(1)}$ ein Repräsentantensystem der Gruppe $B_1|E_2$, $S^{(2)}$ ein solches der Gruppe $B_2|E_1$, so daß also $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ beide je ein Repräsentantensystem der Gruppe $B|((E_1, E_2))$ darstellen. Sind nun $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$ zwei Elemente aus $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$, die dieselbe Klasse von $B|((E_1, E_2))$ vertreten, so muß eine Gleichung $\xi^{(1)} = \xi^{(2)} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$; $\varepsilon_i \equiv 0\,(E_i)$ bestehen. Setzt man dann $\xi = \xi^{(1)} + \varepsilon_2 = \xi^{(2)} = \varepsilon_1$, so besitzt das System S sowohl modulo E_1 als auch modulo E_2 Gruppeneigenschaft, wie sich unmittelbar aus der oben gemachten Bemerkung 2 ergibt, weil ja die Elemente von S aus den Elementen von $S^{(1)}$ bzw. $S^{(2)}$ durch Zufügung eines Elementes aus E_2 bzw. E_1 hervorgehen.

Wir zeigen nun weiter, daß das so gewählte System S auch absolut eine Gruppe darstellt.

Sind nämlich ξ_1 und ξ_2 beliebige Elemente aus S, so gibt es ein Element ξ_3 und ein Element ξ_3', die den Kongruenzen $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \equiv 0\,(E_1)$; $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3' \equiv 0\,(E_2)$ genügen. Die Elemente ξ_3 und ξ_3' müssen aber identisch sein, weil S keine zwei modulo $((E_1, E_2))$ kongruenten Elemente enthält. Daraus folgt $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \equiv 0\,([E_1, E_2])$, also $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0$. Das System S enthält also gleichzeitig mit zwei Elementen stets auch deren Summe, und in gleicher Weise zeigt man, daß in S gleichzeitig mit dem Element ξ stets auch das Element $\Theta \cdot \xi$ vorkommt. Wir können also die ξ so wählen, daß sie eine Gruppe U bilden, und es darf daher, wie behauptet, $B = ((E_1, E_2, U))$ gesetzt werden.

Die Gruppe U kann als „Unendlichkeitsgruppe von B“ bezeichnet werden, da sie nur Elemente enthält, deren sämtliche Zurückleitungen hinsichtlich C_1 und C_2 von Null verschieden sind. U ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt[22a]).

Der Aufbau der Gruppe B ist jetzt, soweit es für unsere Zwecke nötig ist, untersucht. Wir betrachten nun noch den Aufbau der Gruppen C_1 und C_2, und zwar unter der besonderen Voraussetzung, daß C_k mit der C_k-Komponente von A identisch ist, d. h. daß zu jedem γ bzw. δ ein δ bzw. γ gefunden werden kann, das der Kongruenz $\gamma + \delta \equiv 0\,(A)$ genügt.

Satz 10. *Ist $G = ((A, B)) = ((C_1, C_2))$ und ist C_k mit der C_k-Komponente von A identisch, so besteht eine Gleichung $C_1 = ((F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}))$, wobei die Gruppen $F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}$ folgende Bedeutung haben:* 1. *$F^{(1)}$ ist die C_1-Komponente von E_2.* 2. *$F^{(2)}$ ist die C_1-Komponente einer Gruppe U.* 3. *$F^{(3)}$ enthält alle Elemente γ, die einer Gleichung $\gamma + \delta \equiv 0\,(A)$ genügen, wobei δ ein beliebiges Element der C_2-Komponente von E_1 ist*[22]). *Eine analoge Zerlegung existiert für C_2.*

Zum Beweise unseres Satzes haben wir zunächst die Gruppeneigenschaft von $F^{(3)}$ nachzuweisen. Ist $\gamma_1 \equiv 0\,(F^{(3)})$; $\gamma_2 \equiv 0\,(F^{(3)})$, so gibt es zwei Elemente δ_1 und δ_2, die beide der C_2-Komponente von E_1 angehören und den Kongruenzen $\gamma_i + \delta_i \equiv 0\,(A)$ $(i = 1, 2)$ genügen. Dann aber ist

---

[22]) $F^{(3)}$ enthält also insbesondere die ganze Gruppe $[A, C_1]$, da ja unter den Elementen der C_2-Komponente von E_1 auch das Nullelement mitgerechnet werden muß.

[22a]) Vgl. den Zusatz am Schlusse der Arbeit, durch den der Beweisgang bedeutend vereinfacht, vor allem Satz 10 überflüssig gemacht wird.

weiter $(\gamma_1 + \gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2) \equiv 0\,(A)$, und da $\delta_1 + \delta_2$ ebenfalls der C_2-Komponente von C_1 angehört, so muß $\gamma_1 + \gamma_2$ definitionsgemäß gleichzeitig mit γ_1 und γ_2 in $F^{(3)}$ auftreten. Indem wir die gleiche Schlußweise auf γ und $\Theta \cdot \gamma$ anwenden, erkennen wir die Gruppeneigenschaft von $F^{(3)}$. Wir beweisen nun weiter, daß modulo $[A, C_1] = D_1$ die Gruppen B und $C_1' = ((F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}))$ isomorph werden. Zu diesem Zwecke stellen wir fest:

1. $F^{(1)}$ ist zu E_2 und $F^{(2)}$ ist zu U absolut und modulo D_1 holoedrisch isomorph, da es in E_2 und U kein von Null verschiedenes Element mit in A enthaltener C_1-Komponente geben kann.

2. $F_1^{(3)}$ wird modulo D_1 mit E_1 isomorph. Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, braucht man nur zu bedenken, daß im Falle $D_1 = 0$ zu jedem δ aus der C_2-Komponente von E_1 ein eindeutig bestimmtes γ existiert, das der Gleichung $\gamma + \delta \equiv 0\,(A)$ genügt, und daß dieses γ im Falle $\delta \neq 0$ von Null verschieden sein muß, da ja jedes Element aus B mit in A enthaltener C_2-Komponente der Gruppe E_2 angehören muß.

3. Ist $\gamma_i \equiv 0\,(F^{(i)})$ $(i = 1, 2, 3)$, so besteht eine Kongruenz $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \equiv 0\,(D_1)$ nur dann, wenn $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \gamma_3 \equiv 0\,(D_1)$ ist. Es sei nämlich $\gamma_1 + \delta_1 \equiv 0\,(E_2)$; $\gamma_2 + \delta_2 \equiv 0\,(U)$; $\gamma_3 + \delta_3 \equiv 0\,(A)$ und es möge dabei δ_3 der C_2-Komponente von E_1 angehören. Dann enthält E_1, wie aus der zweiten Definition dieser Gruppe zu ersehen ist, ein Element von der Form $\alpha + \delta_3$, und daraus folgt angesichts der Bedeutung von γ_3 und δ_3, daß die B-Komponente von $\pm\gamma_3$ der Gruppe E_1 angehört. Da ferner wegen $\gamma_1 + \gamma_2 \equiv -\gamma_3$ $(A)\,\gamma_1 + \gamma_2$ und $-\gamma_3$ dieselbe B-Komponente besitzen, muß die Zurückleitung von $\gamma_1 + \delta_1 + \gamma_2 + \delta_2$ und mithin auch $\gamma_1 + \delta_1 + \gamma_2 + \delta_2$ selber in E_1 enthalten sein. Daraus folgt sofort $\gamma_1 + \delta_1 = 0$; $\gamma_2 + \delta_2 = 0$, also $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$; $\gamma_3 \equiv 0\,(D_1)$ (bzw. $\gamma_3 = 0$ im Falle $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$).

Aus 1., 2. und 3. ergibt sich unmittelbar: Die Gruppen $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ sind absolut und modulo D_1 elementefremd, ihre Summe stellt also absolut und modulo D_1 eine direkte Summe dar. Ferner ist $F^{(1)}$ zu $E^{(2)}$, $F^{(2)}$ zu U, $F^{(3)}$ zu E_1 modulo D_1 isomorph. Daraus folgt sofort der Isomorphismus von B und C_1' modulo D_1 und mit Hilfe dieser Tatsache kann weiter die Gleichung $((F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)})) = C_1' = C_1$ leicht bewiesen werden.

Modulo D_1 sind nämlich A und C_1 elementefremd, es ist daher nach Satz 1 modulo D_1 die Gruppe C_1 zu einer Untergruppe von B isomorph. Vermöge dieses Isomorphismus wird nun C_1' isomorph auf eine Untergruppe von B abgebildet, und zwar auf eine echte Untergruppe, falls C_1' modulo D_1 nicht mit C_1 identisch ist. Da nun C_1' zu B isomorph ist, und da B zu keiner echten Untergruppe isomorph sein kann, so folgt aus unsern Überlegungen die Gleichheit von C_1 und C_1' modulo D_1. Daraus ergibt sich aber sofort die absolute Gleichheit von C_1 und C_1', weil ja die ganze Gruppe D in $F^{(3)}$ enthalten ist. Hiermit ist Satz 10 bewiesen; mit seiner Hilfe wird es uns im folgenden Paragraphen verhältnismäßig leicht sein, den Fundamentalsatz zu beweisen.

§ 6.

Der Fundamentalsatz.

Satz 11. *Ist* $G = ((A, B)) = ((C_1, C_2))$ *und ist* $[A, C_i] \neq 0$ $(i = 1, 2)$, *so ist* A *zerlegbar.*

Wir dürfen voraussetzen, daß C_k die C_k-Komponente von A darstellt. Ist nämlich C_k' die C_k-Komponente von A, so haben wir: $G' = ((C_1', C_2')) = ((A, [B, G']))$, denn jedes Element aus G' läßt sich in der Form $\alpha + \beta$ darstellen, wobei β in $[B, G']$ auftritt, weil α als Element von A in G' vorkommt. Für die Gruppe G' sind aber die Voraussetzungen von Satz 11 ebenfalls erfüllt, weil $[A, C_k'] = [A, C_k] \neq 0$ ist. Wir dürfen daher von vornherein C_k als C_k-Komponente von A annehmen, und können dann von Satz 10 Gebrauch machen.

Setzen wir gemäß der in § 5 verwandten Bezeichnungsweise $B = ((E_1, E_2, U))$; $C_1 = ((F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}))$, so haben wir $A = ((G_1, G_2))$, wobei G_1 und G_2 folgendermaßen definiert sind: G_1 ist diejenige Untergruppe von A, deren C_1-Komponente durch $F^{(3)}$ gegeben ist, während ihre C_2-Komponente durch die C_2-Komponente von E_1 dargestellt wird. G_2 hingegen ist diejenige Untergruppe von A, deren C_1-Komponente mit $((F^{(1)}, F^{(2)}))$ identisch ist, während die C_2-Komponente aus der Gesamtheit derjenigen Elemente δ besteht, die einer Gleichung $\gamma + \delta \equiv 0\,(A)$; $\gamma \equiv 0\ ((F^{(1)}, F^{(2)}))$ genügen, also insbesondere die ganze Gruppe $[A, C_2] = D_2$ enthält[23]).

Daß G_1 Gruppeneigenschaft besitzt, ist klar. Daß das gleiche von G_2 gilt, erkennt man mit Leichtigkeit auf ähnliche Weise, wie beim Beweise von Satz 10 die Gruppeneigenschaft von $F^{(3)}$ bewiesen wurde. Ferner wird die Gruppe G_1 zu G_2 elementefremd, weil jedenfalls die C_1-Komponenten von G_1 und G_2 elementefremd sind, und weil außerdem G_1 kein von Null verschiedenes Element aus C_2 enthält[24]). Schließlich erschöpfen G_1 und G_2 zusammen die Gruppe A, denn $((G_1, G_2))$ besitzt dieselbe

---

[23]) Es besteht also G_2 aus der Gesamtheit der Elemente $\gamma + \delta$, wobei γ ein Element aus $((F^{(1)}, F^{(2)}))$, δ ein der Gleichung $\gamma + \delta \equiv 0\,(A)$ genügendes Element bedeutet. G_1 ist ganz analog definiert, nur daß C_1 und C_2 die Rollen tauschen (vgl. die Definition von $F^{(3)}$).

[24]) Man beachte, daß E_1 kein von Null verschiedenes Element mit in A vorkommender C_2-Komponente enthält.

C_1-Komponente wie A und enthält außerdem die ganze Gruppe D_2. Aus der nunmehr bewiesenen Richtigkeit der Gleichung $A = ((G_1, G_2))$ folgt sofort die Richtigkeit von Satz 11, denn für $[A, C_i] \neq 0$ $(i = 1, 2)$ sind die Gruppen G_1 und G_2 von Null verschieden.

Den eben bewiesenen Satz kann man auch so aussprechen:

Ist $((A, B)) = ((A_1, A_2))$, und ist A weder zu seiner A_1-, noch zu seiner A_2-Komponente isomorph, so ist A zerlegbar. In dieser Form werden wir jetzt das gewonnene Ergebnis verallgemeinern.

Satz 12. *Ist $G = ((A, B)) = ((A_1, A_2, \ldots, A_r))$ und ist A zu keiner seiner A_i-Komponenten isomorph, ist also A zur Summe von je $r-1$ der Gruppen A_i niemals elementefremd, so ist A zerlegbar.*

Beim Beweise darf man $A_i = A_i^{(A)}$ als A_i-Komponente von A voraussetzen. (Dies wird auf dieselbe Weise gezeigt, wie wir die Richtigkeit der entsprechenden Behauptung bei Satz 11 nachwiesen.) Wir nehmen nun an, Satz 12 sei für $r = r_0 - 1$ bewiesen (für $r_0 = 3$ ist diese Voraussetzung ja in der Tat richtig), und zeigen dann seine Gültigkeit für r_0.

Es sei $\bar{A}_1 = ((A_2, A_3, \ldots, A_{r_0}))$ und $\bar{A}_1^*$ bezeichnet die der Darstellung $G = ((A_1, \bar{A}_1))$ entsprechende A_1-Komponente von A[25]). Dann besteht eine Gleichung $((A_1, \bar{A}_1^*)) = ((A, [B, ((A_1, \bar{A}_1^*))])) = ((A, B_1))$. Ist nun A zu $\bar{A}_1^*$ nicht isomorph, so können wir Satz 11 anwenden und unmittelbar auf die Zerlegbarkeit von A schließen.

Es ist also nur noch der Fall zu untersuchen, daß A zu A_1 elementefremd, und mithin zu $\bar{A}_1^*$ isomorph ist. Hier sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

a) $[B_1, \bar{A}_1^*] \neq 0$. In diesem Falle betrachten wir die Restklassengruppe von $((A, B_1))$ nach $[B_1, \bar{A}_1^*]$. A', B_1' usw. mögen die Gruppen bedeuten, die in dieser Restklassengruppe A, B_1 usw. entsprechen. Dann sind A_1' und $\bar{A}_1^*$ elementefremd wegen der Elementefremdheit von A_1 und $\bar{A}_1^*$. In ähnlicher Weise erkennt man die Richtigkeit der Gleichung $[A', B_1'] = 0$. Schließlich folgt aus der Elementefremdheit von A und B_1 noch die Isomorphie von A und A'. $\bar{A}_1^{*\prime}$ hingegen kann nicht zu A' isomorph sein, da nach einer seiner von 0 verschiedenen Untergruppen die Restklassengruppe gebildet wurde. Wir können daher auf die Gleichung $((A', B_1')) = ((A_1', \bar{A}_1^{*\prime}))$ den Satz 3 anwenden, und aus ihm die Zerlegbarkeit von A' und folglich von A erschließen.

b) $[B_1, \bar{A}_1^*] = 0$. In diesem Falle muß B_1 zu einer Untergruppe von A_1 und umgekehrt (wegen der Elementefremdheit von A_1 und A) A_1 zu einer Untergruppe von B_1 isomorph sein. Daraus ergibt sich die

---

25) Diese Komponente ist natürlich im allgemeinen von der direkten Summe der A_i-Komponenten von A $(i = 2, 3, \ldots, r)$ verschieden.

Isomorphie von A_1 und B_1. Es muß also A_1 die A_1-Komponente von B_1 darstellen, und es muß daher für ein beliebiges Element $\alpha \equiv 0(A_1)$ ein Element von der Form $\alpha + \beta$; $\beta \equiv 0(\bar{A}_1^*)$ in B_1 vorkommen. Daraus folgt, daß man jedes Element aus B in der Gestalt $\eta + \vartheta$ darstellen kann, wobei $\eta \equiv 0(B_1)$; $\vartheta \equiv 0([B, \bar{A}_1])$ ist. Aus $[B_1, \bar{A}_1^*] = 0$ ergibt sich nun, daß B_1 auch zu $\bar{A}_1$ elementefremd sein muß[26], wir haben also $B = ((B_1, [B, \bar{A}_1]))$, mithin $G = ((A, B)) = ((A, B_1, [B, \bar{A}_1])) = ((A_1, \bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1]))$. (Daß in der letzten Gleichung ebenfalls die Doppelklammer stehen darf, erkennt man unmittelbar aus der Tatsache, daß jedes Element aus $[\bar{A}_1^*, B, \bar{A}_1]$ auch in B_1 vorkommen, und folglich gleich 0 sein muß.) Aus der abgeleiteten Gleichung folgt weiter $((\bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1])) = ((A_2, A_3, \ldots, A_{r_0}))$. Denn $((\bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1]))$ stellt eine Untergruppe von $((A_2, A_3, \ldots, A_{r_0}))$ dar, die nach Satz 1 wegen der Gültigkeit der Gleichung $((A_1, \bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1])) = ((A_1, A_2, \ldots, A_{r_0}))$ zu $((A_2, A_3, \ldots, A_{r_0}))$ isomorph ist.

Von der Gleichung $((\bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1])) = ((A_2 \ldots A_{r_0})$ ausgehend, schließen wir jetzt so weiter:

Die Gruppe $\bar{A}_1^*$ ist wegen ihrer Isomorphie mit der Gruppe A zu keiner ihrer A_i-Komponenten $(i = 2, 3, \ldots, r_0)$ isomorph. Denn diese Komponenten sind ja Untergruppen von A_i $(i = 2, \ldots, r_0)$ und jede der Gruppen A_i ist zu einer *echten* Restklassengruppe von A isomorph. Da nun auf der rechten Seite von $((\bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1])) = ((A_2 \ldots A_{r_0}))$ insgesamt nur $r_0 - 1$ Komponenten auftreten, so kann von Satz 12 Gebrauch gemacht werden. $\bar{A}_1^*$ und mithin A müssen also zerlegbar sein.

Hiermit ist der Schluß von r_0 auf $r_0 + 1$ allgemein durchgeführt und Satz 12 ist voll bewiesen. Wir benutzen das gewonnene Ergebnis zum Beweise des Fundamentalsatzes.

Es seien $G = ((A_1, A_2, \ldots, A_r)) = ((B_1, B_2, \ldots, B_s))$ zwei Darstellungen von G durch unzerlegbare Summanden. *Wir zeigen dann zuerst, daß bei geeigneter Wahl der Numerierung B_1 als B_1-Komponente von A_1 und zu A_1 isomorph angenommen werden darf.* In der Tat, nach Satz 12 kann die Bezeichnung jedenfalls so gewählt werden, daß A_1 zu seiner B_1-Komponente isomorph ist. Sollte diese Komponente nun eine echte Untergruppe von B_1 werden, so suchen wir weiter eine Gruppe A_i, derart, daß B_1 zu seiner A_i-Komponente isomorph wird. Eine solche Gruppe existiert nach Satz 12 stets, und zwar muß sie von A_1 verschieden sein, weil man andernfalls zu einer isomorphen Abbildung von A_1 auf eine seiner echten Untergruppen käme, indem man zunächst A_1 auf seine B_1-Komponente, alsdann wieder B_1 auf seine A_1-Komponente isomorph abbildete. Wir dürfen also annehmen, daß B_1 zu seiner A_2-Komponente isomorph wird.

[26]) Weil jedes Element aus $[\bar{A}_1, B_1]$ auch in $\bar{A}_1^*$ vorkommen muß.

Wir wenden nun dieselbe Schlußweise, die wir eben bei B_1 benutzten, auf A_2 an, und finden, daß bei geeigneter Wahl der Bezeichnung A_2 zu seiner B_2-Komponente isomorph wird, falls nicht A_2 mit der A_2-Komponente von B_1 identisch ist. Tritt der erstere der beiden Fälle ein, so beachten wir, daß dann A_1 zu einer *echten* Untergruppe von B_2 isomorph sein muß, wie man erkennt, wenn man zuerst A_1 auf seine B_1-Komponente, alsdann B_1 auf seine A_2-Komponente, schließlich A_2 auf seine B_2-Komponente isomorph abbildet. Wir kommen unter Benutzung dieser Tatsache entsprechend dem Früheren zu der Alternative: Entweder es ist B_2 mit der B_2-Komponente von A_2 identisch, oder es wird bei geeigneter Numerierung B_2 zu seiner A_3-Komponente isomorph. Indem wir nun immer nach dem gleichen Schema Schritt für Schritt weiterschließen, kommen wir entweder einmal zu dem Falle, daß A_i zu seiner B_i-Komponente oder B_i zu seiner A_{i+1}-Komponente isomorph und daß diese Komponente mit B_i bzw. A_{i+1} identisch wird. Dann brauchen wir bloß geeignet umzunumerieren und eventuell die Buchstaben A und B zu vertauschen, um zu erreichen, daß die B_1-Komponente von A_1 mit B_1 identisch und zu A_1 isomorph wird. Oder aber es tritt für $r \leqq s$ (für $s \leqq r$ erleiden unsere Betrachtungen nur eine ganz unwesentliche Änderung) der Fall ein, daß A_i zu einer echten Untergruppe von B_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ und B_i zu einer echten Untergruppe von A_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ isomorph wird. Dann aber ist nicht nur A_r, sondern auch jede der Gruppen A_i $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ zu einer *echten* Untergruppe von B_r isomorph. (Das erkennt man durch wiederholte isomorphe Abbildung genau so, wie wir oben zeigten, daß bei unsern Annahmen A_1 zu einer echten Untergruppe von B_2 isomorph wurde.) Es kann daher B_r zu keiner Untergruppe irgendeines A_i isomorph sein, im Widerspruch mit den Schlüssen, die wir aus Satz 12 ziehen können.

Der zuletzt angenommene Fall ist also ausgeschlossen und wir dürfen daher von vornherein von der Annahme ausgehen, daß die B_1-Komponente von A_1 mit B_1 identisch und zu A_1 isomorph ist[27]). Dann haben wir zunächst $[A_1, ((B_2 \ldots B_s))] = 0$ nach Satz 1 und weiter $((A_1, A_2, \ldots, A_r)) = ((A_1, B_2, \ldots, B_s)) = G$. Denn die Gruppe $((A_1, B_2, \ldots, B_s))$ enthält die ganze Gruppe B_1, weil zu jedem Element $\beta \equiv 0\,(B_1)$ ein Element $\alpha \equiv 0\,(A_1)$ gehört, derart, daß $\alpha = \beta + \bar{\beta}$; $\bar{\beta} \equiv 0\,(((B_2 \ldots B_s)))$ wird. Aus der Gleichung $((A_1, A_2, \ldots, A_r)) = ((A_1, B_2, \ldots, B_s))$ folgt weiter nach Satz 1 die

[27]) Bei den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen, sowie bei den Gruppen von endlichem Rang läßt sich die Möglichkeit dieser Annahme wesentlich einfacher beweisen als bei den allgemeinen v. e. A. G. Man braucht nur A_1 so zu wählen, daß keine der Gruppen A_i und B_i mehr Elemente bzw. größeren Rang als A_1 besitzt und B_1 so, daß A_1 zu seiner B_1-Komponente isomorph wird. Dann ergibt sich unmittelbar die Identität von B_1 mit dieser Komponente.

Isomorphie der Gruppen $((A_2 \ldots A_r))$ und $((B_2 \ldots B_s))$. Auf Grund dieser Tatsache beweist man nun die Gültigkeit des Fundamentalsatzes mit Hilfe der vollständigen Induktion nach demselben Schema, nach dem wir in § 3 den Beweis des Hauptsatzes für die vollständig reduziblen Gruppen geführt haben. Wir schenken uns die Durchführung des trivialen Beweises und formulieren nur noch das gewonnene Ergebnis ausführlich:

Fundamentalsatz: Sind $G = ((A_1, A_2, \ldots, A_r)) = ((B_1, B_2, \ldots, B_s))$ *zwei Darstellungen der Gruppe G durch unzerlegbare Summanden, so ist* $r = s$, *und bei geeigneter Numerierung sind* A_i *und* B_i *isomorph.*

Es soll nun noch untersucht werden, wann die Darstellung einer Gruppe durch unzerlegbare Summanden absolut eindeutig ist und wann es tatsächlich verschiedene Darstellungen gibt. Es gilt:

Satz 13. *Ist* $G = ((A_1, A_2, \ldots, A_r))$ *eine Darstellung von G durch unzerlegbare Summanden, so ist diese Darstellung dann und nur dann eindeutig, wenn keine der Gruppen* A_i *eine zu einer Restklassengruppe von* A_k $(i \neq k)$ *isomorphe, von 0 verschiedene Untergruppe enthält.*

In der Tat, es bedeute B_1 eine Untergruppe von A_1, $B_2 \neq 0$ eine solche von A_2, und es sei $A_1 | B_1$ zu B_2 isomorph. Wir bezeichnen dann mit β ein beliebiges Element aus B_1, mit ξ einen Repräsentanten der Gruppe $A_1 | B_1$, mit ζ dasjenige Element aus B_2, das dem Repräsentanten ξ durch den zwischen $A_1 | B_1$ und B_2 bestehenden Isomorphismus zugeordnet ist, und betrachten das System A_1', das aus der Gesamtheit aller Elemente von der Form $\beta + \xi + \zeta$ besteht. *Dieses System bildet eine Gruppe.* In der Tat, sind $\beta_1 + \xi_1 + \zeta_1$ und $\beta_2 + \xi_2 + \zeta_2$ zwei beliebige Elemente des Systems, so gehört auch das Element $(\beta_1 + \xi_1 + \zeta_1) + (\beta_2 + \xi_2 + \zeta_2) = (\beta_1 + \beta_2) + (\xi_1 + \xi_2) + (\zeta_1 + \zeta_2)$ dem Systeme an, weil $\beta_1 + \beta_2$ ein Element aus B_1 ist, und weil dem Repräsentanten $\xi_1 + \xi_2$ der Gruppe $A_1 | B_1$ vermöge des zwischen $A_1 | B_1$ und B_2 bestehenden Isomorphismus das Element $\zeta_1 + \zeta_2$ aus B_2 zugeordnet ist. In ganz entsprechender Weise zeigt man, daß auch die Anwendung der Operatoren nicht aus dem System herausführt, A_1' besitzt also tatsächlich Gruppeneigenschaft.

Die Gruppe A_1' ist von A_1 verschieden, weil nicht alle Elemente ζ gleich 0 sind, sie ist zu A_2 elementefremd, weil dem Repräsentanten des Nullelements in $A_1 | B_1$ nur das Nullelement aus B_2 zugeordnet ist, schließlich besteht, wie unmittelbar zu sehen, die Gleichung $((A_1', A_2)) = ((A_1, A_2))$ und mithin $((A_1', A_2, \ldots, A_r)) = ((A_1, A_2, \ldots, A_r))$. Die in Satz 13 angegebene Bedingung ist also für die Eindeutigkeit der Darstellung notwendig.

Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Es sei nämlich $((A_1, A_2, \ldots, A_r)) = ((A_1', A_2', \ldots, A_r'))$, wobei etwa A_1' unter den Gruppen A_i nicht auftritt.

Dann dürfen wir nach dem Fundamentalsatz bei geeigneter Wahl der Bezeichnung voraussetzen, daß A_1 mit der A_1-Komponente von A_1' identisch und zu A_1' isomorph ist. Setzen wir $[A_1, A_1'] = D$; $((A_2 \ldots A_r)) = \bar{A}$ und bezeichnen wir mit $\bar{A}'$ die $\bar{A}$-Komponente von A_1', so ist $\bar{A}'$ nach Satz 1 zu $A_1' \mid D$ und folglich auch zu $A_1 \mid D$ isomorph[28]. Wir betrachten nun die A_i-Komponenten von $\bar{A}'$. Diese sind Untergruppen der Gruppen A_i, die nicht sämtlich gleich der Nullgruppe sein können, weil $\bar{A}'$ wegen $A_1 \neq A_1'$ und mithin $[A_1', A_1] \neq A_1'$ von der Nullgruppe verschieden sein muß. Es sei etwa die A_2-Komponente von $\bar{A}'$, die wir mit B_2 bezeichnen wollen, von Null verschieden. Dann ist B_2 zu einer Restklassengruppe von $\bar{A}'$ und folglich zu einer Restklassengruppe von $A_1 \mid D$ isomorph. Eine Restklassengruppe von $A_1 \mid D$ kann aber auch als Restklassengruppe von A_1 aufgefaßt werden[29]. Aus der Existenz zweier verschiedener Zerlegungen für die Gruppe G im Sinne des Fundamentalsatzes kann also bei geeigneter Wahl der Bezeichnung auf die Isomorphie einer von Null verschiedenen Untergruppe von A_2 mit einer Restklassengruppe von A_1 geschlossen werden, d. h. die in Satz 13 angegebene Eindeutigkeitsbedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. — Im Falle der vollständig reduziblen Gruppen erhalten wir aus Satz 13 die in der Literatur wohlbekannte Bedingung: *Die Darstellung einer vollständig reduziblen Gruppe durch irreduzible Komponenten ist dann und nur dann eindeutig, wenn keine zwei isomorphen Komponenten auftreten.* — Wir verlassen jetzt die allgemeine Theorie, um uns Anwendungen zuzuwenden.

§ 7.

Formale Theorie der Differentialgleichungssysteme[30].

Um die in den vorangehenden Paragraphen entwickelte Theorie anzuwenden, müssen wir zunächst über den Operatorenbereich weitergehende Annahmen als bisher machen. Wir wollen in diesem Paragraphen an-

---

[28] Man beachte, daß die isomorphe Zuordnung von A_1 und A_1' in unserm Falle derart ist, daß die Elemente von D sich selber zugeordnet werden.

[29] Ist nämlich $(A \mid D) \mid D_1$ die in Betracht kommende Gruppe, so hat man bei Benutzung der Bezeichnungsweise von § 1 und § 2: $(A \mid D) \mid D_1 = A \mid (D \frown D_1)$.

[30] Vgl. zu diesem Paragraphen die Abhandlungen: A. Loewy, Über Matrizen- und Differentialkomplexe, Math. Ann. 78 (1917), S. 1—51 bzw. S. 343—368; Begleitmatrizen und lineare homogene Differentialausdrücke, Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 58—125; E. Noether-W. Schmeidler, Moduln in nicht-kommutativen Bereichen, Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 1 bis 35. Die genannten Arbeiten sollen in Zukunft kurz mit L. I, L. II, N.-S. zitiert werden. In N.-S. sind, wie bereits in der Einleitung hervorgehoben, allgemein partielle Differentialgleichungssysteme in den Kreis der Betrachtung gezogen, doch läßt sich von unserer Theorie auf solche Systeme im allgemeinen keine Anwendung machen, da die ihnen zugeordneten Gruppen nicht not-

nehmen, daß O einen Körper $\mathfrak{K}$ enthält, in dem analytische Funktionen einer Variablen x vorkommen[31]), und daß dabei insbesondere in $\mathfrak{K}$ stets gleichzeitig mit $a(x)$ auch die abgeleitete Funktion $\frac{d}{dx}a(x) = a'(x)$ auftritt. Außer den Elementen von $\mathfrak{K}$ soll in O nur noch der eine Operator $\frac{d}{dx}$, die Differentiation, vorkommen. Der Operator $\frac{d}{dx}$ stellt also dann den Operatorenbereich O' im Sinne von § 4 dar.

Es sei jetzt $G = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ eine Gruppe vom endlichen Range n. Dann müssen sich die Ableitungen $\frac{dy_i}{dx}$ linear und homogen durch die y_i ausdrücken lassen, wir haben also ein lineares und homogenes Differentialgleichungssystem (in Zukunft abgekürzt Ds.): $\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y_k$, das wir auch als Matrizengleichung $\left(\frac{dy}{dx}\right) = A(y)$ schreiben können. Dabei bedeutet A die Matrix $\|a_{ik}\|$, (y) $\left(\text{und entsprechend } \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$ eine Matrix von der besonderen Gestalt

$$\begin{Vmatrix} y_1 & 0 & \ldots & 0 \\ y_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

Durch unser Ds. ist der Aufbau der Gruppe G vollständig bestimmt, denn wir können mit seiner Hilfe nicht nur die ersten Ableitungen der y_i durch die y_i selbst, sondern auch, wie man durch $n-1$-fache Differentiation des Ds. erkennt, die Ableitungen n-ter Ordnung durch diejenigen $n-1$-ter bis 0-ter Ordnung und folglich letzten Endes durch die y_i allein ausdrücken.

Das Ds. seinerseits ist durch G nicht eindeutig bestimmt, es hängt vielmehr von der Basis ab, die wir für G wählen. Ist $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine zweite Basis von G, so besteht eine Transformationsgleichung $(y) = P\cdot(z)$, wobei P eine Matrix mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ und mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Wir erhalten daher $\frac{d}{dx}(P\cdot(z)) = A\cdot P\cdot(z)$, $\frac{d}{dx}P\cdot(z) + P\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right) = A\cdot P\cdot(z)$, oder wenn wir $\frac{d}{dx}P = P'$ setzen, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = (-P^{-1}\cdot P' + P^{-1}\cdot A\cdot P)\cdot(z)$. Das für die (z) gültige Ds., das wir aus dem für die (y) gültigen durch eine lineare Transformation der abhängigen Veränderlichen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ und mit nicht verschwin-

---

wendig v. e. A. G. zu sein brauchen. Wir gehen daher hier nicht näher auf partielle Systeme ein, vor allem deshalb, weil bisher noch keine Methode vorliegt, um die partiellen Systeme mit zugeordneten v. e. A. G. von beliebigen Systemen zu unterscheiden.

[31]) Im Spezialfall kann natürlich $\mathfrak{K}$ auch ausschließlich aus Konstanten bestehen.

dender Determinante erhalten haben, heißt mit dem zu den (y) gehörigen Ds. „*von derselben Art*“ [32]). Den Zusammenhang zwischen Gruppe und Ds. können wir jetzt so formulieren:

Zu jeder Gruppe gehört eine Klasse von Ds. derselben Art (d. h. die Gesamtheit der Ds., die mit einem festen Ds. von derselben Art sind) und jedem Ds. der Klasse entspricht eine Basis der Gruppe.

Erhält man zwischen den Gruppen $G = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ und $G' = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dadurch eine isomorphe Zuordnung, daß man jeweils y_i und z_i einander zuordnet, so müssen die zwischen den Ableitungen der y_i und den y_i selbst bestehenden Differentialgleichungen mit denen zwischen den Ableitungen der z_i und den z_i identisch sein, d. h. wenn wir $\left(\frac{d y_i}{d x}\right) = A \cdot (y)$; $\left(\frac{d z_i}{d x}\right) = A' \cdot (z)$ setzen, so muß die Matrizengleichung $A = A'$ bestehen. Umgekehrt ist die Gültigkeit dieser Gleichung hinreichend dafür, daß die Zuordnung von y_i und z_i zwischen den Gruppen G und G' einen Isomorphismus herstellt. Daraus ergibt sich unmittelbar der Satz:

Zwei Gruppen sind dann und nur dann isomorph, wenn ihnen dieselbe Ds.-Klasse zugeordnet ist.

Um nun, gestützt auf den Zusammenhang zwischen Gruppen und Ds., aus dem Fundamentalsatz ein Theorem über Ds. abzuleiten, müssen wir untersuchen, was aus der Zerlegbarkeit einer Gruppe G für die zugehörige Ds.-Klasse folgt. Ist $G = ((A, B))$ und bezeichnet $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}$ $(0 < n_1 < n)$ eine Basis von A, $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \ldots, y_n$ eine solche von B, so betrachten wir das Ds. D, das der Basis $y_1, y_2, \ldots, y_n$ entspricht. D muß offenbar die Gestalt

$$\frac{d y_{i_1}}{d x} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{i_1 k}\, y_k \qquad (i_1 = 1, 2, \ldots, n_1);$$

$$\frac{d y_{i_2}}{d x} = \sum_{k=n_1+1}^{n} a_{i_2 k}\, y_k \qquad (i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n)$$

besitzen, es zerfällt also in zwei Ds. D_1 und D_2 von den Ordnungen n_1 bzw. $n - n_1$. *Wir wollen eine Klasse von Ds. gleicher Art und ebenso jedes einzelne Ds. der Klasse zerlegbar oder unzerlegbar nennen, je nachdem ob in der Klasse ein zerfallendes Ds. vorkommt oder nicht.* Dann können wir feststellen:

Eine Gruppe G ist zerlegbar oder nicht, je nachdem ihre zugeordnete Ds.-Klasse zerlegbar oder unzerlegbar ist.

---

[32]) Vgl. L. I u. II. Dort findet man die wesentlichen Grundlagen für den hier dargelegten Zusammenhang zwischen Gruppen und Ds. Der Begriff des „von derselben Art seins“ ist symmetrisch, reflexiv, transitiv (vgl. L. I, S. 6 f.).

Stellt man die Gruppe D als direkte Summe von unzerlegbaren Summanden $A_1, A_2, \ldots, A_r$ dar und bezeichnet man mit $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ eine Basis von A_i, so erhält man zu der Basis $(\ldots, y_{ik}, \ldots)$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, n_i)$ ein Ds., das in r unzerlegbare Ds. zerfällt, die zu den Gruppen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ gehören. Es gibt also in jeder Klasse von Ds. gleicher Art ein in unzerlegbare Ds. zerfallendes System, oder mit andern Worten, *man kann jedes Ds. durch eine lineare Transformation der abhängigen Veränderlichen in eine Kette von unzerlegbaren Ds. überführen.* Die Art dieser Transformation wird im allgemeinen nicht eindeutig festgelegt sein, durch Anwendung unseres Fundamentalsatzes erhalten wir aber angesichts des Zusammenhangs zwischen Ds. und Gruppen:

Satz 14. *Wie auch immer man ein Ds. in eine Kette von unzerlegbaren Ds. überführt, stets ist die Anzahl der unzerlegbaren Komponenten die gleiche und bei geeigneter Numerierung sind entsprechende Komponenten von derselben Art*[33]).

Man kann das eben ausgesprochene Theorem sofort auf Matrizen übertragen, denn wir können ja jedem Ds. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = A \cdot (y)$ in eindeutiger Weise seine Matrix A zuordnen. Wir werden dann zwei Matrizen A und B von derselben Art nennen, wenn ihre zugehörigen Ds. von derselben Art sind, wenn also eine Gleichung $A = -P^{-1} \cdot P' + P^{-1} B P$ besteht, ferner wird eine Matrix zerlegbar heißen, wenn sie mit einer Matrix $\begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$ von derselben Art ist, wobei A_1 und A_2 Matrizen von niedrigerem Grade als A bedeuten. Wir erhalten dann als Analogon zu Satz 14:

Satz 15. *Jede Matrix A ist mit einer Matrix*

$$\begin{Vmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & A_r \end{Vmatrix}$$

von derselben Art, wobei $A_1, A_2, \ldots, A_r$ unzerlegbare Matrizen bedeuten, d. h. jede Matrix läßt sich in eine Kette von unzerlegbaren Matrizen überführen. Wird eine gegebene Matrix auf zwei verschiedene Weisen in eine

---

[33]) Um die Allgemeingültigkeit von Satz 14 einzusehen, beachte man, daß sich nicht nur jeder Gruppe eine Klasse von Ds., sondern auch jedem Ds. eine Gruppe zuordnen läßt. Ist nämlich $D \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right) = A \cdot (y)$ das gegebene System, so braucht man nur die Linearformen in den y_i zu betrachten und die Transformationsformeln zwischen den y_i und ihren Ableitungen mit Hilfe von D zu definieren. In entsprechender Weise läßt sich jeder Matrix A eine Gruppe zuordnen, indem man einfach A als die Koeffizientenmatrix eines Ds. ansieht.

Kette von unzerlegbaren Matrizen übergeführt, so stimmt bei beiden Ketten die Anzahl der Komponenten überein und bei geeigneter Numerierung sind entsprechende Komponenten von der gleichen Art[34]).

Enthält der Körper $\mathfrak{K}$ nur Konstanten, so sind A und B nach der oben gegebenen Definition von derselben Art, wenn eine Gleichung $A = P^{-1}BP$ besteht. In diesem Falle heißen A und B nach der gebräuchlichen Ausdrucksweise ähnlich, und wir können daher feststellen:

Ist eine Matrix zwei Ketten von unzerlegbaren Matrizen ähnlich, so ist bei beiden Ketten die Anzahl der Komponenten gleich, und bei geeigneter Numerierung sind entsprechende Komponenten ähnlich.

Es ist das eine Tatsache, die aus der Elementarteilertheorie wohl bekannt ist.

Man kann nun den Begriff der v. A. G. auch bei linearen Differentialgleichungen (in Zukunft kurz Dg.) n-ter *Ordnung mit einer abhängigen Veränderlichen y anwenden.* Zunächst sagt man, zwei Dg. n-ter Ordnung mit Koeffizienten aus einem Funktionenkörper $\mathfrak{K}$ sind von derselben Art, wenn sie es als Dg. erster Ordnung mit n abhängigen Veränderlichen aufgefaßt sind. Ferner nennen wir die Dg. $D(y) = 0$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der total teilerfremden[35]) Dg. $D_1(y) = 0$, $D_2(y) = 0, \ldots, D_r(y) = 0$, wenn die Gesamtheit der Integrale von D mit der Gesamtheit der Integrale von $D_1, D_2, \ldots, D_r$ übereinstimmt, und wenn außerdem die Gleichung $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ besteht, falls n die Ordnung von D und n_i diejenige von D_i bedeutet. Schließlich wollen wir eine Dg. zerlegbar nennen, wenn sie sich als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von total teilerfremden Komponenten niedrigerer Ordnung darstellen läßt, im andern Falle soll sie unzerlegbar heißen. Es ist unmittelbar klar, daß jede Dg. sich als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von unzerlegbaren Dg. darstellen läßt. *Ferner kann man, wie in N.-S. gezeigt ist*[36]), *jeder Dg. eine v. A. G., in der N.-S. Terminologie ihre „Restgruppe" zuordnen, derart, daß einer zerlegbaren Dg. eine zerlegbare Restgruppe entspricht und umgekehrt, und daß für die Gleichartigkeit zweier*

---

[34]) Dieser Satz, sowie Satz 14 war bisher nur in dem Falle bekannt, in dem das Ds. bzw. die Matrix „vollständig reduzibel" ist, d. h. in dem die zugeordnete Gruppe sich als direkte Summe von irreduziblen Gruppen darstellen läßt. — Vgl. L. II, S. 103, Satz 6, sowie A. Loewy, Über vollständig reduzible Differentialgleichungen, Math. Ann. **62** (1906), S. 106.

[35]) Der Ausdruck „total teilerfremd" bezieht sich auf die Tatsache, daß wegen der Ordnungsbedingung $n = \Sigma n_i$ zwischen den Integralen von $D_1, D_2, \ldots, D_r$ keine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen kann.

[36]) N.-S. § 3 u. § 4.

Dg. die Isomorphie der Restgruppen notwendige und hinreichende Bedingung ist. Dabei besitzt die einer gewöhnlichen (nicht partiellen) Dg. zugeordnete Restgruppe endlichen Rang. Wir können daher den Fundamentalsatz anwenden und feststellen:

Satz 16. *Wie auch immer man eine Dg. als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von unzerlegbaren, total teilerfremden Dg. darstellt, stets ist die Anzahl der Komponenten gleich, und bei geeigneter Numerierung sind entsprechende Komponenten von derselben Art*[37]).

Die in diesem Paragraphen abgeleiteten Sätze lassen sich infolge der formalen Natur der Beweismethode unmittelbar auf den Fall übertragen, daß wir statt mit der Differentiation mit der Differenzenbildung als Operator arbeiten, daß wir also die Theorie der Differenzen- statt die der Differentialgleichungen behandeln[38]).

§ 8.

Zerlegung von Matrizenkomplexen[39]).

In § 7 haben wir uns u. a. mit der Zerlegung einer Einzelmatrix beschäftigt und einen grundlegenden Eindeutigkeitssatz aufgestellt. Es liegt nun nahe, die diesbezüglichen Untersuchungen auf Komplexe [insbesondere auf (gewöhnliche) Gruppen] von Matrizen zu übertragen. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß der Körper $\mathfrak{K}$, dem die Matrizenelemente entnommen werden, nur Konstanten enthält. Im allgemeinen Fall, wo analytische Funktionen einer Variablen auftreten, lassen sich die Untersuchungen in genau gleicher Weise führen.

Es seien $A = \{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots\}$, $B = \{B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots\}$ *zwei Komplexe von Matrizen* n-ten *Grades*[40]), *dann heißen* A *und* B *ähnlich, wenn eine feste Matrix* P *existiert, die für jedes* i *der Gleichung* $A^{(i)} = P^{-1}B^{(i)}P$ *Genüge leistet. Ein Matrizenkomplex heißt dann und nur dann zerlegbar, wenn er einem Komplex* $\Gamma = \{C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots\}$ *ähnlich ist, bei dem für jedes* i *die Matrix* $C^{(i)}$ *die Gestalt* $C^{(i)} = \begin{Vmatrix} C_1^{(i)} & 0 \\ 0 & C_2^{(i)} \end{Vmatrix}$ *besitzt, wobei insbesondere alle Matrizen* $C_1^{(i)}$ *(und mithin auch alle Matrizen* $C_2^{(i)}$*) den-*

[37]) Auch dieser Satz war bisher nur im Falle der vollständigen Reduzibilität der auftretenden Dg. bzw. Restgruppen bekannt. Vgl. N.-S. § 4, wo vollständig reduzible *partielle* Dg. betrachtet werden.

[38]) Vgl. N.-S. § 1.

[39]) Vgl. zu dem vorliegenden Paragraphen L. I.

[40]) Der obere Index in den geschweiften Klammern soll nur zur Unterscheidung der einzelnen Matrizen dienen. Er soll nicht andeuten, daß jeder Komplex nur abzählbar viele Matrizen enthalten darf. Das gewonnene Resultat gilt z. B. unmittelbar für kontinuierliche Matrizengruppen.

selben von 0 *und* n *verschiedenen Grad besitzen.* Von dem Matrizenkomplex Γ wollen wir sagen, er zerfalle in die beiden Komplexe $\Gamma_i = \{C_i^{(1)}, C_i^{(2)}, \ldots\}$ $(i = 1, 2)$. Zu jedem Komplex A gibt es einen ähnlichen Komplex Γ, der in eine Kette von unzerlegbaren Komplexen zerfällt. Nach den Ergebnissen des vorangehenden Paragraphen kann man die Richtigkeit des folgenden Satzes vermuten:

Satz 17. *Ist der Matrizenkomplex* A *zu zwei verschiedenen in unzerlegbare Komplexe zerfallenden Komplexen* Γ_1 *und* Γ_2 *ähnlich, so stimmt bei* Γ_1 *und* Γ_2 *die Anzahl der Komponenten überein, und bei geeigneter Numerierung sind entsprechende Komponenten ähnlich.*

Um die Richtigkeit von Satz 17 nachzuweisen, *ordnen wir dem Matrizenkomplex* A *einen Gruppenkomplex* $\mathfrak{G} = \{G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots\}$ *in genau der gleichen Weise zu, wie wir in* § 7 *einer Einzelmatrix eine Einzelgruppe zuordneten. Es sei* $G^{(i)}$ *eine zu* $A^{(i)}$ *gehörige Gruppe und insbesondere* $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})$ *eine zu* $A^{(i)}$ *gehörige Basis von* $G^{(i)}$. *Wir führen dann* n *„Komplexelemente"* $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ *durch die Gleichungen* $\mathfrak{y}_k = \{y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots\}$ *ein, und betrachten den Komplex* $\mathfrak{G}$, *der aus der Gesamtheit der linearen Verbindungen von* $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ *mit Koeffizienten aus* $\mathfrak{K}$ *besteht. Dabei ist Multiplikation mit Körperelementen und Addition von Komplexelementen durch die Gleichungen*

$$a \cdot \mathfrak{y} = \{a \cdot y^{(1)}, a \cdot y^{(2)}, \ldots\}; \quad \mathfrak{y} + \mathfrak{y}' = \{y^{(1)} + y^{(1)\prime}, y^{(2)} + y^{(2)\prime}, \ldots\}$$

definiert und zwei Komplexelemente $\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{y}'$ *gelten dann und nur dann als gleich, wenn für jedes* i *die entsprechenden Glieder* $y^{(i)}$ *und* $y^{(i)\prime}$ *identisch sind.* — Unter diesen Voraussetzungen ist ein Komplexelement durch jedes seiner Glieder eindeutig bestimmt, *insbesondere ist* $\mathfrak{y}$ *gleich dem Nullelement* $\{0, 0, \ldots\}$ *des Komplexes, falls für irgendein* i *sein* i*-tes Glied gleich Null ist.* Diese Tatsache ist für das Rechnen mit Komplexelementen von grundlegender Bedeutung; man kann mit ihrer Hilfe mit Gruppenkomplexen genau so arbeiten, wie wir es früher mit Einzelgruppen taten.

Wir definieren zunächst: *Die Elemente* $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_m$ $(m \leqq n)$ *bilden einen Unterkomplex* $\mathfrak{G}_1$ *von* $\mathfrak{G}$, *falls für jedes* i *die Elemente* $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ *eine Basis einer Untergruppe von* $G^{(i)}$ *darstellen.* Sind dabei die Elemente $\mathfrak{y}_i$ linear unabhängig, besitzt, wie wir sagen wollen, $\mathfrak{G}_1$ den Rang m, so besitzt auch jede der Gruppen $G_1^{(i)}$ den Rang m.

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß ein Komplexelement verschwinden muß, falls eines seiner Glieder verschwindet; wäre $G_1^{(i)}$ eine Gruppe von niedrigerem als m-ten Rang, bestände also eine Gleichung $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k y_k^{(i)} = 0$, so müßte auch $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mathfrak{y}_k = 0$ sein entgegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Elemente $\mathfrak{y}_k$.

Wir definieren jetzt weiter: *Unter der Summe* $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r)$ (*dem Durchschnitt* $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r]$) *der r Komplexe* $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r$ *verstehen wir die Gesamtheit aller Elemente der Form* $\sum_k \mathfrak{y}_k$, *wobei* $\mathfrak{y}_k$ *ein beliebiges Element aus* $\mathfrak{G}_k$ *bedeutet* (*die Gesamtheit aller in* $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ *gleichzeitig auftretenden Elemente*).

Summe und Durchschnitt sind Komplexe, und zwar besitzt $(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_r)$ $([\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_r])$ den Rang m, wenn für irgendein beliebiges i die Summe (der Durchschnitt) der Gruppen $G_1^{(i)}, \ldots, G_r^{(i)}$ vom Range m ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß unter unseren Voraussetzungen jedenfalls die i-ten Glieder einer Basis von $(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_r)$ $([\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_r])$ eine Basis von

$$(G_1^{(i)}, \ldots, G_r^{(i)}) \ ([G_1^{(i)}, \ldots, G_r^{(i)}])$$

bilden, und aus dem, was wir oben über den Rang eines Komplexes bemerkten.

Wir können nun nach dem Schema, das wir eben an dem Begriff des Unterkomplexes, des Summen- und des Durchschnittkomplexes darlegten, in genauer Analogie mit den Entwicklungen von § 1 den Begriff der direkten Summe zweier Komplexe, den Begriff des Komponenten-, sowie des Restklassenkomplexes einführen. Auch die Zerlegbarkeit eines Komplexes werden wir in genau der gleichen Weise wie bei einer Einzelgruppe definieren.

Dabei kommt man zu Sätzen wie dem folgenden: Ist $\mathfrak{G}$ ein beliebiger Unterkomplex von $((\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2))$ und bedeutet $\mathfrak{G}_k^{(\mathfrak{G})}$ die $\mathfrak{G}_k$-Komponente von $\mathfrak{G}_k$ $(k = 1, 2)$ und bezeichnet man mit $G^{(i)}, G_1^{(i)}, G_2^{(i)}$ das i-te Glied von $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ [41]), so stellt das i-te Glied von $\mathfrak{G}_k^{(\mathfrak{G})}$ die $G_k^{(i)}$-Komponente von $G^{(i)}$ dar und besitzt gleichen Rang wie $\mathfrak{G}_k^{(\mathfrak{G})}$.

Man sieht, die Theorie der Komplexe läßt sich in ganz derselben Weise entwickeln, wie die der Einzelgruppen. Es ist nur noch über den Isomorphiebegriff einiges zu sagen:

Zwei Komplexe $\mathfrak{G} = \{G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots\}$ *und* $\mathfrak{G}' = \{G_1^{(1)'}, G_2^{(2)'}, \ldots\}$ *heißen isomorph, wenn sich eine Basis* $\mathfrak{y}_k = \{y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots\}$ *von* $\mathfrak{G}$ *und eine Basis* $\mathfrak{y}_k = \{y_k^{(1)'}, y_k^{(2)'}, \ldots\}$ *von* $\mathfrak{G}'$ *so bestimmen läßt, daß durch die Zuordnung von* $y_k^{(i)}$ *und* $y_k^{(i)'}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots)$ *zwischen jeder der Gruppen* $G^{(i)}$ *und* $G^{(i)'}$ *eine isomorphe Beziehung hergestellt wird.*

Um einzusehen, daß sich mit der so eingeführten Komplexisomorphie in derselben Weise arbeiten läßt wie früher mit der Gruppenisomorphie, braucht man nur zu bedenken, daß sich der grundlegende Satz 1 unmittelbar auf Komplexe übertragen läßt.

---

[14]) D. h. die Gruppe, die aus den i-ten Gliedern der Elemente von $\mathfrak{G}$ usw. besteht.

Das ist in der Tat der Fall: Es sei nämlich $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe von $((\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2))$ und es sei $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2] = 0$. Bedeutet nun $\mathfrak{y}_k = \{y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{y}_k' = \{y_k^{(1)'}, y_k^{(2)'}, \ldots\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ eine solche von $\mathfrak{G}_1^{(\mathfrak{G})}$, und ist allgemein $\mathfrak{y}_k = \mathfrak{y}_k' + \mathfrak{y}_k''$, wobei $\mathfrak{y}_k''$ ein Element aus $\mathfrak{G}_2$ darstellt, so erhält man infolge von Satz 1 zwischen dem i-ten Glied von $\mathfrak{G}$ und dem i-ten Glied von $\mathfrak{G}_1^{(\mathfrak{G})}$ eine isomorphe Zuordnung, wenn man allgemein $y_k^{(i)}$ und $y_k^{(i)'}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ einander zuordnet. Daraus ergibt sich aber nach der oben formulierten Isomorphiedefinition, daß zwischen den Komplexen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1^{(\mathfrak{G})}$ ein Isomorphismus hergestellt wird, wenn man $\mathfrak{y}_k$ und $\mathfrak{y}_k'$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ aufeinander bezieht.

Man sieht, daß man allgemein die Schlüsse der ersten vier Paragraphen ohne Schwierigkeit von Gruppen auf Komplexe übertragen kann. Wir dürfen daher sofort den Satz aussprechen:

Satz 18. *Der Fundamentalsatz bleibt richtig, wenn man überall an Stelle von „Gruppe“ das Wort „Komplex“ einsetzt.*

Mit Satz 18 ist auch Satz 17 bewiesen, wie man durch ähnliche Überlegungen, wie sie in § 7 angewendet wurden, leicht einsieht. Zunächst kann jedem Matrizenkomplex $A = \{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots\}$ ein Gruppenkomplex $\mathfrak{G} = \{G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots\}$ zugeordnet werden, und zwar eine ganz bestimmte Basis $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ dieses Komplexes. Geht man durch eine Transformation $(\mathfrak{y}) = P\cdot(\mathfrak{y}')$ zu einer neuen Basis von $\mathfrak{G}$ über, so entspricht dem der Übergang von A zu dem ähnlichen Komplexe

$$P^{-1}AP = \{P^{-1}A^{(1)}P, P^{-1}A^{(2)}P \ldots\}.$$

Es ist also jedem Gruppenkomplex eine Klasse ähnlicher Matrizenkomplexe zugeordnet, und daraus folgt angesichts der für Gruppenkomplexe gültigen Isomorphiedefinition leicht: *Zwei Gruppenkomplexe sind dann und nur dann isomorph, wenn ihnen dieselbe Klasse ähnlicher Matrizenkomplexe zugeordnet ist.*

Man braucht jetzt nur noch zu bedenken, daß infolge der Zerlegbarkeitsdefinition bei Matrizen- und Gruppenkomplexen einem zerlegbaren Gruppenkomplex eine Klasse zerlegbarer Matrizenkomplexe zugeordnet ist und umgekehrt, dann erkennt man unmittelbar die Richtigkeit von Satz 17. Damit ist wieder ein Resultat gewonnen, das bisher nur im Falle der vollständigen Reduzibilität des gegebenen Matrizenkomplexes bekannt war[42]. Von besonderem Interesse dürfte unser Ergebnis dann sein, wenn es sich nicht um einen beliebigen Matrizenkomplex, sondern um eine gewöhnliche Gruppe von Matrizen, etwa um die Monodromiegruppe, oder die Picard-Vessiotsche Gruppe einer Differentialgleichung handelt.

---

[42]) Vgl. L. I, § 6, S. 28 ff.

Zusatz bei der Korrektur. Der Beweis des grundlegenden Satzes 11 von § 6 läßt sich im Anschluß an Satz 9 sehr einfach folgendermaßen führen: Die ganzen Schlüsse des § 5, die wir von den Darstellungen $G = ((A, B)) = ((C_1, C_2))$ ausgehend auf B angewandt haben, lassen sich in gleicher Weise bei A durchführen. *Wir finden also auch für A eine direkte Summenzerlegung $A = ((E_1, E_2, U))$.* Ist nun A weder zu seiner C_1- noch zu seiner C_2-Komponente isomorph, so haben wir nach Satz 1: $[A, C_1] \neq 0$; $[A, C_2] \neq 0$, also nach Definition der Endlichkeitsuntergruppen: $E_1 \neq 0$; $E_2 \neq 0$. Es ist mithin A notwendig zerlegbar, falls es weder zu seiner C_1- noch zu seiner C_2-Komponente isomorph ist.

Durch diese einfachen Betrachtungen, die mir E. Noether zwecks nachträglicher Beifügung zur Arbeit mitteilte, läßt sich der ganze umständliche Satz 10, sowie der auf Satz 10 gegründete Beweis von Satz 11 ersparen. Ja, es wäre sogar nicht einmal der volle Satz 9 nötig, sondern es genügte zum Beweise von Satz 11 der Nachweis, daß für A eine direkte Summenzerlegung $A = ((E_1, A_1))$ existiert, bei der E_2 eine Untergruppe von A_1 ist. Doch ist die Gültigkeit einer Gleichung $A = ((E_1, E_2, U))$ wohl an und für sich von Interesse.

Freiburg i. Br., 21. Januar 1925.

(Eingegangen am 14. Dezember 1923.)